Nome e Cognome: ______________________

Matricola: ______________________

Data: ______________________

Algebra I

1. Sia F il campo con 3 elementi e $\tau_{ab} \in End(F)$ definita da $\tau_{ab}(x) = ax + b$.

   (a) Dimostrare che $G = \{\tau_{ab} \,|\, 0 \neq a, b \in F\}$ è un gruppo rispetto alla composizione di funzioni;

   (b) determinare $|G|$;

   (c) mostrare che $\pi : \tau_{ab} \mapsto a$ definisce un omomorfismo suriettivo da G in F^*, il gruppo moltiplicativo di F;

   (d) dedurre che $N = \{\tau_{1b} \,|\, b \in F\} \trianglelefteq G$;

   (e) dimostrare che $G/N \simeq \mathbb{Z}/2$;

   (f) (opzionale) provare che $G \simeq Sym(3)$.

2. Sia $F = \mathbb{F}_p$, p primo dispari, e $a(x) = x^2 + 1 \in F[x]$.

   (a) Dimostrare che $a(\alpha) = 0$ per qualche $\alpha \in F$ sse $o(\alpha) = 4$ in F^*;

   (b) Provare che $a(x)$ è irriducibile sse $p \equiv_4 3$ (usare il fatto che F^* è ciclico);

   (c) Provare che $K = F[x]/I$, ove $I = a(x)F[x]$ è un campo se $p \equiv_4 3$

   (d) Descrivere esplicitamente gli elementi di K e calcolare $|K|$;

   (e) Provare, avvalendosi del Teorema Cinese del resto, che $K \simeq F \oplus F$, somma diretta di anelli, se $p \equiv_4 1$.