

Nome e Cognome: \_\_\_\_\_

Matricola: \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_\_\_

# Algebra I

1. Un elemento  $a$  di un anello  $A$  si dice idempotente se  $a^2 = a$ . Determinare gli elementi idempotenti dei seguenti anelli:
  - (a) il campo con 9 elementi  $\mathbb{F}_9$ ;
  - (b) l'anello  $\mathbb{Q}[x]$  dei polinomi a coefficienti razionali;
  - (c) l'anello quoziente  $\mathbb{F}_3[x]/I$ , dove  $I$  è l'ideale generato da  $x^2 - 1$ ;
  - (d) sia  $E_{ij}$  la matrice avente 1 in posizione  $(i, j)$  e 0 altrove. Dimostrare che  $m^{-1}(aE_{11} + bE_{22})m$  sono idempotenti di  $(F)_2$ , l'anello delle matrici  $2 \times 2$  sul campo  $F = \mathbb{F}_2$  con 2 elementi,  $m \in GL_2(F)$ ,  $a, b \in F$ ;
  - (e) (facoltativo) provare che tutti gli idempotenti di  $(\mathbb{F}_2)_2$  sono della forma vista sopra.
2. Sia  $\psi$  la mappa da  $\mathbb{Z}/24$  in  $\mathbb{Z}/6 \times \mathbb{Z}/4$  definita da  $\psi([a]_{24}) = ([a]_6, [a]_4)$ .
  - (a) Dimostrare che  $\psi$  definisce un omomorfismo di anelli;
  - (b) Determinare il nucleo di  $\psi$ ;
  - (c) Calcolare  $|\psi(\mathbb{Z}/24)|$ ;
  - (d) Descrivere esplicitamente gli elementi di  $\psi(\mathbb{Z}/24)$ .