

Nome e Cognome: \_\_\_\_\_  
Matricola: \_\_\_\_\_

## Algebra II

1. Sia  $F = \mathbb{F}_5$  il campo con 5 elementi e  $D_{10} = \langle a, b : a^5 = b^2 = e, a^b = a^{-1} \rangle$  un gruppo diedrale di ordine 10.
  - (a) Mostrare che  $R(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $R(b) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  si estende ad una rappresentazione di  $G$  su  $F$ ;
  - (b) Determinare tutti i sottomoduli del modulo naturale  $V = F^2$  e dedurre che  $V$  è riducibile;
  - (c) Dimostrare che non vale in generale l'inverso del Lemma di Schur.
2. Sia  $G$  il gruppo simmetrico su 3 oggetti.
  - (a) Provare che  $e_1 = \frac{1}{6} \sum_{g \in G} g$  e  $e_2 = \frac{1}{6} \sum_{g \in G} \text{sgn}(g)g$  sono elementi idempotenti nell'algebra gruppo  $A = \mathbb{C}G$ .
  - (b) Dimostrare che  $e_1, e_2$  sono ortogonali, ossia  $e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$ .
  - (c) Provare che  $V_i = A e_i$  sono due  $G$ -sottomoduli di dimensione 1 di  $A$  pensato come modulo regolare.