Nome e Cognome: ____________________

Matricola: __________

# Algebra II

1. Sia $G = C_5 \times C_2$, ove $C_n$ denota un gruppo ciclico di ordine $n$.
   (a) Mostrare che $G$ è abeliano;
   (b) Determinare tutte le rappresentazioni irriducibili di $G$;
   (c) Trovare una rappresentazione fedele di $G$.

2. Sia $G$ il gruppo simmetrico su 2 oggetti.
   (a) Provare che $e_1 = \frac{1}{2}\sum_{g\in G} g$ e $e_2 = \frac{1}{2}\sum_{g\in G} sgn(g)g$ sono elementi idempotenti nell'algebra gruppo $A = \mathbb{C}G$.
   (b) Dimostrare che $e_1$, $e_2$ sono ortogonali, ossia $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$.
   (c) Provare che $V_i = Ae_i$ sono due $G$-sottomoduli di dimensione 1 di $A$ pensato come modulo regolare.

3. Sia $G = Alt(4)$, $V$ il $\mathbb{C}G$-modulo di permutazione.e $\pi$ il relativo carattere.
   (a) Mostrare che $\pi(g)$ conta i punti fissati da $g$;
   (b) Dedurre che $\pi(g^m) \geq \pi(g)$ per ogni intero $m$, $g \in G$;
   (c) Provare che $\sum_{g\in G} \pi(g) = |G|$ calcolando $|\{(i, g) : i^g = i\}|$ in due modi diversi, ove $g \in G$ e $1 \leq i \leq 4$.