

Nome e Cognome: \_\_\_\_\_  
Matricola: \_\_\_\_\_

## Algebra II

1. Sia  $F = \mathbb{F}_7$  il campo con 7 elementi e  $D_{14} = \langle a, b : a^7 = b^2 = e, a^b = a^{-1} \rangle$  un gruppo diedrale di ordine 14.
  - (a) Mostrare che  $R(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $R(b) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  si estende ad una rappresentazione di  $G$  su  $F$ ;
  - (b) Determinare tutti i sottomoduli del modulo naturale  $V = F^2$  e dedurre che  $V$  è riducibile;
  - (c) Dimostrare che non vale in generale l'inverso del Lemma di Schur.
2. Sia  $F = \mathbb{F}_5$  e  $G = GL_2(F)$ .
  - (a) Provare che  $V$  l'insieme dei polinomi omogenei di grado 1 in due variabili  $x, y$  a coefficienti su  $F$  è un  $F$ -spazio vettoriale di dimensione 2;
  - (b) Provare che
$$p(x, y) \cdot g := p(x', y')$$
ove  $(x', y') := (x, y)g$  definisce una struttura di  $FG$ -modulo su  $V$ ;
  - (c) Sia  $W$  l'insieme dei polinomi omogenei di grado 2 in due variabili  $x, y$  a coefficienti su  $F$ . Provare che  $W$  è un  $F$ -spazio vettoriale di dimensione 3;
  - (d) Provare che
$$p(x, y) \cdot g := p(x', y')$$
ove  $(x', y') := (x, y)g$  definisce una struttura di  $FG$ -modulo su  $W$ ;
  - (e) Determinare la rappresentazione associata a  $W$  rispetto alla base  $x^2, xy, y^2$ .