Nome e Cognome: ______________________________
Matricola: ______________________________
Data: ______________________________

Algebra II

1. Sia $F = \mathbb{F}_5$ il campo con 5 elementi e $D_{10} = \langle a, b \,:\, a^5 = b^2 = e, a^b = a^{-1} \rangle$ un gruppo diedrale di ordine 10.

   (a) Mostrare che $R(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $R(b) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ si estende ad una rappresentazione di G su F;

   (b) Determinare tutti i sottomoduli del modulo naturale $V = F^2$ e dedurre che V è riducibile;

   (c) Dimostrare che non vale in generale l'inverso del Lemma di Schur.

2. Sia G il gruppo simmetrico su 3 oggetti.

   (a) Provare che $e_\chi = \frac{1}{6} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} g$, ove $\chi \in Irr(G)$, sono elementi idempotenti centrali (primitivi) nell'algebra gruppo $A = \mathbb{C}G$.

   (b) Provare che $V_\chi = Ae_\chi$ sono G-sottomoduli di dimensione $\chi(1)^2$ di A pensato come modulo regolare.

3. Sia $G = \langle g \mid g^3 = e \rangle$ ciclico di ordine 3.

   (a) Determinare $a, b, c \in \mathbb{C}$ tali che $M = aR(e) + bR(g) + cR(g^2)$ sia uguale a E_{11} ove E_{rs} è la matrice elementare il cui elemento in posizione (r, s) vale $\delta_{ir}\delta_{js}$ e R è la rappresentazione regolare;

   (b) Provare che $\mathbb{C}G$ è isomorfa all'algebra delle matrici diagonali di ordine 3 su $\mathbb{C}$.