

Nome e Cognome: \_\_\_\_\_

Matricola: \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_\_\_

## Algebra II

1. Sia  $F = \mathbb{F}_5$  il campo con 5 elementi e  $G = \langle a, b : a^4 = b^2, a^b = a^{-1} \rangle$  il gruppo dei quaternioni di ordine 16.
  - (a) Mostrare che  $R(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $R(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  si estende ad una rappresentazione di  $G$  su  $F$ ;
  - (b) Determinare il nucleo  $K$  di  $R$ ;
  - (c) Dimostrare che  $K \cap Z(G) \neq 1$ .
2. Sia  $G = C_6 \times C_2$  il prodotto diretto di gruppi ciclici di ordine 6 e 2.
  - (a) Provare che  $G$  non è ciclico.
  - (b) Determinare una rappresentazione di grado 2 sui razionali.
3. (a) Calcola il prodotto di Kronecker  $a \otimes b$  delle matrici  $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$   
e  $b = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ .
  - (b) Determina il polinomio caratteristico di  $a \otimes b$ ;
  - (c) Determina il polinomio caratteristico di  $b \otimes a$ ;