Nome e Cognome: ____________________

Matricola: ____________________

Data: ____________________

Algebra II

1. Sia $F = \mathbb{F}_5$ il campo con 5 elementi e $G = \{\tau_{ab} : x \mapsto ax + b \,|\, a, b \in F, \quad a \neq 0\}$, ove $x \in F$.
   - (a) Mostrare che G è un gruppo rispetto alla composizione di funzioni;
   - (b) Provare che G agisce in modo 2-transitivo su F;
   - (c) Calcolare le classi di coniugio di G;
   - (d) Sia $\pi(g) = |\{x \in F : x^g = x\}|$; provare che π definisce un carattere di G;
   - (e) Sia $\chi(g) = \pi(g) - 1$. Provare che $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$;
2. Siano X, Y due gruppi e $D = X \times Y$.
   - (a) Dimostrare che $D' = X' \times Y'$ e $Z(D) = Z(X) \times Z(Y)$;
   - (b) Date ϕ e ψ funzioni di classe di X e Y rispettivamente, provare che $\rho(x, y) := \phi(x)\psi(y)$ definisce una funzione di classe per D;
   - (c) Provare, utilizzando il concetto di prodotto tensore, che nel punto precedente si può sostituire funzione di classe con carattere;
   - (d) Determinare per $X = Y = \mathrm{Sym}(3)$, $|T|$, ove $T = D, D'$ e $Z(D)$;
   - (e) Calcolare ρ quando $\phi = \psi \in \mathrm{Irr}(\mathrm{Sym}(3))$ con $\phi(1) = 2$.