1 a) F è G-equivalente a $X = \{(x,1) : x \in F\}$ e G agisce su X via $(x,1)^{\tau_{ab}} = (ax+b, 1)$. Tale azione si esprime come

$$(x,1)\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} = (ax+b, 1).$$ Quindi G è isomorfo al

sottoinsieme $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} : a,b \in F, a \neq 0 \right\}$ del gruppo $GL_2(F)$

Ora $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & 0 \\ bc+d & 1 \end{pmatrix} \in H$, quindi H è sottogruppo

Oppure si calcola direttamente $\tau_{ab} \circ \tau_{cd} = \tau_{ac, bc+d}$

b) G è 2-trans su $F \Leftrightarrow G$ è trans e $G_0 = Stab_G(0)$ è trans su $F^* = F \setminus \{0\}$. Ora $\tau_{1b}(0) = b$ quindi $0^G = F$ e G è trans.

Ora $G_0 = \{\tau_{ab} : \tau_{ab}(0) = b = 0\} = \{\tau_{a0}\}$ Siano $x, y \in F^*$

$a = y/x$, allora $\tau_{a0}(x) = y$ e G_0 è trans su F^*

c) Sia $\pi : G \to F^*$, $\tau_{ab} \longmapsto a$, allora π è omomorfismo e $N = \ker \pi \trianglelefteq G$

Quindi N è unione di classi di coniugio. Una è $\{id\}$.

Ora $G = N \rtimes G_0$, prodotto semidiretto. Siccome $N \simeq F^+$ è abeliano

calcolo $\tau_{1b}^{\tau_{a0}}$. Ora $\tau_{a0}^{-1} = \tau_{a^{-1}0}$ $\quad x \xmapsto{\tau_{a^{-1}0}} a^{-1}x \xmapsto{\tau_{1b}} a^{-1}x + b \xmapsto{\tau_{a0}} x + ab$

quindi $\tau_{1b}^{\tau_{a0}} = \tau_{1ab}$ Allora $\tau_{11}^{G} = \{\tau_{1b} : b \neq 0\}$

Analogamente, essendo G_0 abeliano $\tau_{a0}^{G} = \tau_{a0}^{N}$. Poiché $\tau_{1b}^{-1} = \tau_{1,-b}$

Ora $x \xmapsto{\tau_{1,-b}} x - b \xmapsto{\tau_{a0}} ax - ab \xmapsto{\tau_{1b}} ax - ab + b$, $\tau_{a0}^{\tau_{1b}} = \tau_{a, b(1-a)}$

Se $a \neq 1$, $\{b(1-a) : b \in F\} = F$ e $\tau_{a0}^{G} = \{\tau_{ab} : b \in F\}$ ha 5 elementi

Quindi le classi sono $\{id\}$, $\{\tau_{1b} : b \in F^*\}$ $\{\tau_{ab} : b \in F\}$ $a = 2,3,4$

d) Sia V il modulo di permutazione definito da F come G-insieme

Allora il corrispondente carattere conta quanti elementi sono fissati, come proprio $\pi(g)$

e) Poiché G è 2-transitivo $X(g)$ è irriducibile

Termine a sinistra coincide col gruppo generato dal termine a destra, ossia $X' \times Y'$. Analogamente $(z,w) \in Z(D) \Leftrightarrow (z,w)(x,y) = (x,y)(z,w)$ $\forall x \in X, y \in Y \Leftrightarrow \begin{cases} zx = xz \\ wy = yw \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} z \in Z(X) \\ w \in Z(Y) \end{matrix}$

b) Sia $(s,t) \in D$, allora $\rho((x,y)^{(s,t)}) = \rho(x^s, y^t) = \phi(x^s)\psi(y^t) = \phi(x)\psi(y)$ $= \rho(x,y)$

c) Sia V il modulo indotto da ϕ, W quello da $\psi \Rightarrow V \otimes W$ è indotto da ρ e ρ è un carattere

d) $|X| = |Y| = 6 \quad X' = Y' = Alt(3), \quad Z(X) = Z(Y) = \{id\}$

$|D| = 36, \quad |D'| = 9 \quad |Z(D)| = 1$

e) $\phi(g) = 2, 0, -1$ se $Typ(g) = 1^3, (1^1 2^1), 3^1$

D ha 9 classi di coniugio ottenute combinando i 3 tipi visti sopra che chiamo u = uno, d = due, t = tre

$(u,u) \quad (u,d), (u,t) \quad \dots \quad (t,t)$

$\rho \quad 4 = 2 \cdot 2 \quad 0 = 2 \cdot 0 \quad -2 = 2 \cdot -1 \quad \quad 1 = -1 \cdot -1$