Alg II

1a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^4 = B^2 = I$, $A^B = -A = A^{-1}$

b) $Z(G) = \langle a^2 \rangle$ infatti $z = a^j b^k \Rightarrow z^b = a^{-j} b^k = z \Leftrightarrow a^{2j} = 1 \Leftrightarrow j \equiv_2 0$

$b \notin Z(G) \Rightarrow Z(G) = \langle a^2 \rangle$

c) $R(a^2) = -I \notin K \Rightarrow Z \cap K = e$

d) In un 2-gruppo G, $\forall N \trianglelefteq G \Rightarrow N \cap Z(G) \neq e$. Per cui $K = e$

2a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ $\chi_A(x) = x^2 - \beta x - \alpha = \mu_A(x)$. Poiché $A^5 = I$

$\mu_A(x) \mid x^5 - 1$. Sia $p = 5$, allora $x^5 - 1 = (x-1)^5$ $\mu_A(x) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

$\beta = 2$, $\alpha = -1$

Se $p \neq 5$ $\gcd(x^5 - 1, 5x^4) = 1$ ha radici distinte, quindi $\mu = (x-\omega)(x-\omega')$

$\omega^5 = \omega'^5 = 1$, $\beta = \omega + \omega'$ $\alpha = -\omega\omega'$ (non tutte le scelte stanno in $\mathbb{F}_p$)

b) Se $p \neq 5$ Maschke assicura V completamente riducibile

Inoltre gli autovalori di A sono distinti: V è riducibile $\Leftrightarrow \omega \in \mathbb{F}_p \Leftrightarrow 5 \mid p-1$

Se $p = 5$ ho lo stesso autovalore e questo vale 1, quindi V non è né riducibile né completamente irriducibile

3 Vedi soluzione Ex del 10.02 2011