

Nome e Cognome: \_\_\_\_\_

Matricola: \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_\_\_

## Algebra II

1. Sia  $F = \mathbb{F}_5$  il campo con 5 elementi e  $G = \langle a, b : a^4 = b^2 = e, a^b = a^{-1} \rangle$  il gruppo diedrale di ordine 8.
  - (a) Mostrare che  $R(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $R(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  si estende ad una rappresentazione di  $G$  su  $F$ ;
  - (b) Determinare  $Z(G)$ ;
  - (c) Dimostrare che  $K \cap Z(G) = e$ , ove  $K$  denota il nucleo di  $R$ ;
  - (d) Dedurre che  $R$  è fedele.
  
2. Sia  $F = \mathbb{F}_p$  il campo con  $p$  elementi,  $p$  primo, e  $G = \langle a : a^3 = e \rangle$  il gruppo ciclico di ordine 3. e sia  $V$  un  $FG$ -modulo  $V$  di dimensione 2.
  - (a) Determinare per quali valori  $\alpha, \beta \in F$ ,  $R(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$  definisce una rappresentazione di  $G$ .
  - (b) Per quali valori di  $p$ ,  $\alpha$  e  $\beta$ ,  $V = F^2$  risulta essere riducibile? completamente riducibile?
  
3. Sia  $G$  il gruppo simmetrico su 3 oggetti.
  - (a) Provare che  $e_\chi = \frac{1}{6} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} g$ , ove  $\chi \in Irr(G)$ , sono elementi idempotenti centrali (primitivi) nell'algebra gruppo  $A = \mathbb{C}G$ .
  - (b) Provare che  $V_\chi = Ae_\chi$  sono  $G$ -sottomoduli di dimensione  $\chi(1)^2$  di  $A$  pensato come modulo regolare.