

Nome e Cognome: _____
Matricola: _____

Algebra II

1. Sia G il gruppo alterno su 4 elementi.
 - (a) Determinare $\text{Syl}_p(G)$, al variare di p tra i primi;
 - (b) Detto $V \in \text{Syl}_2(G)$ e $T \in \text{Syl}_3(G)$, mostrare che G è il prodotto semidiretto di V con T ;
 - (c) Determinare $A = \text{Aut}(V)$ e $\phi \in \text{hom}(T, A)$ tale che $G = V \rtimes_{\phi} T$.
2. Sia G il gruppo simmetrico su 3 oggetti e $K = \mathbb{F}_3$ il campo con 3 elementi.
 - (a) Sia V il modulo di permutazione su K . Provare che $W = K(1, 1, 1)$ e $U = W^{\perp}$ sono sottomoduli di V ;
 - (b) Provare che $U \geq W$ e determinare l'azione di G su U/W ;
 - (c) Stabilire se U/W è isomorfo a W .
3. Sia G il gruppo diedrale di ordine 8.
 - (a) Calcolare il sottogruppo derivato G' di G e il relativo gruppo quoziente;
 - (b) Dedurre che G ammette 4 rappresentazioni irriducibili complesse non-equivalenti di grado 1 e costruirle;
 - (c) Mostrare con metodi geometrici e/o aritmetici che G ammette un'ulteriore rappresentazione irriducibile e se ne calcoli il grado.