Algebra II

1a) $Syl_2(G) = \{V\}$ $\quad V = \langle (12)(34), (14)(23) \rangle$ $\quad Syl_3(G) = \{\langle (abc) \rangle\}$

b) Da $|Syl_2(G)| = 1$ segue $V \trianglelefteq G$. Allora $VT \leq G$, ma $V \cap T = 1 \Rightarrow$

$|VT| = |V||T| = 4 \cdot 3 = 12 = |G|$ $\quad VT = G$

c) Si ha $A \simeq GL_2(2) \simeq S_3$, poiché $V \simeq \mathbb{Z}/_2 \times \mathbb{Z}/_2 \simeq \mathbb{F}_2^2$ spazio vettoriale su $\mathbb{F}_2$

Sia $t = (123)$, $v = (12)(34)$ $\quad w = (13)(24)$, allora

$v^t = (23)(14) = vw$ $\quad w^t = (12)(34) = v$. Allora coniugio mediante t

corrisponde alla moltiplicazione per matrice $m = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\varphi \in \mathrm{Hom}(T, A)$ tale che $\varphi(t) = \alpha(m)$ ove α è l'isomorfismo tra

$GL_2(2)$ ed A

2 a) $(1,1,1)g = (1,1,1)$ quindi $W \leq V$. Siccome il prodotto scalare è

G-invariante ossia $v \cdot w = vg \cdot wg = \sum_{i=1}^{3} v_i w_i$, anche $U = W^\perp \leq V$

b) $(1,1,1)\cdot(1,1,1) = 3 = 0 \in \mathbb{F}_3 \Rightarrow U \geq W$. U è generato da $\overset{u_1}{(1,-1,0)}$ e $\overset{u_2}{(0,1,-1)}$

Siccome $u_1 - u_2 \in W$, $u_1 + W$ è base per $U/_W$. Sia $t = (123)$, allora

$u_1 t = u_2$ $\quad$ ossia $(u_1 + W)t = (u_2 + W)$. Sia $s = (12)$, allora $u_1 s = (-1,1,0) = -u_1$

e $(u_1 + W)s = -(u_1 + W)$. Quindi $U/_W$ isomorfo al modulo segno

cioè $\mathbb{F}_3$ con l'azione $\quad 1g = \mathrm{sgn}(g) \cdot 1$

c) No, poiché W è isomorfo al modulo banale

3 a) $G = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = e,\ a^b = a^{-1} \rangle$, allora $[a,b] = a^2 \in Z(G)$. Quindi

$\langle a^2 \rangle \leq G'$, $\langle a^2 \rangle \trianglelefteq G$. Ora $G/_{\langle a^2 \rangle} \simeq \mathbb{Z}/_2 \times \mathbb{Z}/_2$ è abeliano, quindi $G' = \langle a^2 \rangle$

b) $|G/G'| = 4 = |\{\lambda \in \mathrm{Irr}(G) : \lambda(e) = 1\}|$ $\quad \lambda = \gamma_{ij} : a^s b^t \longmapsto (-1)^{si+tj}$ $\quad i,j \in \mathbb{Z}/_2$

c) Poiché $8 = 1+1+1+1+d_5^2 + \cdots + d_k^2$ con $2 \leq d_5 \leq d_k$, si ha $k = 5$ $\; d_5 = 2$.