

Nome e Cognome: \_\_\_\_\_

Matricola: \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_\_\_

## Algebra II

1. Sia  $V$  il gruppo prodotto diretto di 4 copie di  $\mathbb{Z}/2$  ed  $Y$  un gruppo ciclico di ordine 3.
  - (a) Provare che  $A = \text{Aut}(V)$  è isomorfo a  $GL_4(2)$
  - (b) Dimostrare che  $R : Y \rightarrow GL_4(2)$  definita da  $R(y) = \text{diag}(M, M)$ ,  
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
 si estende ad un omomorfismo da  $Y$  in  $GL_4(2)$ ;
  - (c) Determinare una presentazione finita per  $G = V \rtimes_R Y$  (basta descrivere una presentazione per  $V$ , per  $Y$  e l'azione di  $Y$  su  $V$ );
  - (d) Dimostrare che  $[v, y] = v(R(y) - I)$ ,  $\forall v \in V$ ;
  - (e) Dedurre che  $G' = V$ ;
  - (f) Determinare tutti e soli i caratteri irriducibili di grado 1 per  $G$ .
2. Sia  $A$  un sottogruppo abeliano di un gruppo  $G$  e  $\chi$  un carattere irriducibile di  $G$  di grado  $d$ .
  - (a) Dimostrare che  $\chi_A$ , la restrizione della funzione  $\chi$  ad  $A$  è una funzione di classe e un carattere di  $A$ ;
  - (b) Provare che  $\chi_A = \sum_{j=1}^d \lambda_j$ , ove  $\lambda_j$  sono caratteri irriducibili di  $A$ ;
  - (c) Provare che  $\chi_A = \sum_{j=1}^d a_j \mu_j$ , ove  $\mu_j$  sono caratteri irriducibili distinti di  $A$  e  $a_j \in \mathbb{N}$ ;
  - (d) Provare che  $\langle \chi_A, \chi_A \rangle_A = \sum_j a_j^2 \geq \sum_j a_j = d$ ;
  - (e) Provare che  $|G| = |G| \langle \chi, \chi \rangle_G \geq |A| \langle \chi_A, \chi_A \rangle_A$  e dedurre che  $d \leq |G : A|$ ;
  - (f) Dedurre che  $\chi(e) = 1, 2$  se  $G$  denota il gruppo diedrale  $D_{2n}$ .