Nome e Cognome: ______________________________
Matricola: _______________

Algebra II

1. Sia $G = C_5 \times C_2$, ove C_n denota un gruppo ciclico di ordine n.
   (a) Mostrare che G è abeliano;
   (b) Determinare tutte le rappresentazioni irriducibili di G;
   (c) Trovare una rappresentazione fedele di G.
2. Sia $F = \mathbb{F}_5$ il campo con 5 elementi e $G = \langle a, b \, : \, a^4 = b^2 = e, a^b = a^{-1} \rangle$ il gruppo diedrale di ordine 8.
   (a) Mostrare che $R(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $R(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ si estende ad una rappresentazione di G su F;
   (b) Determinare $Z(G)$;
   (c) Dimostrare che $K \cap Z(G) = e$, ove K denota il nucleo di R;
   (d) Dedurre che R è fedele.
3. Sia G il gruppo simmetrico su 3 oggetti e $K = \mathbb{F}_3$ il campo con 3 elementi.
   (a) Sia V il modulo di permutazione su K. Provare che $W = K(1, 1, 1)$ e $U = W^{\perp}$ sono sottomoduli di V;
   (b) Provare che $U \geq W$ e determinare l'azione di G su U/W;
   (c) Stabilire se U/W è isomorfo a W.