

Nome e Cognome: _____
Matricola: _____

Algebra II

1. Sia G il gruppo diedrale D_8 e sia $V = \mathbb{C}G$ il suo modulo regolare.
 - (a) Determinare una base per V
 - (b) Mostrare che $R(g) : x \mapsto xg$ e $S(g) : x \mapsto g^{-1}x$, per ogni $x \in G$ si estendono a rappresentazioni di G ;
 - (c) Provare che $R(G)$ e $S(G)$ commutano come sottogruppi di $\text{GL}_8(\mathbb{C})$.
2. Sia G il gruppo simmetrico su 3 cifre.
 - (a) Provare che $e_1 = \frac{1}{6} \sum_{g \in G} g$ e $e_2 = \frac{1}{6} \sum_{g \in G} \text{sgn}(g)g$ sono elementi idempotenti nell'algebra gruppo $A = \mathbb{C}G$.
 - (b) Dimostrare che e_1, e_2 sono ortogonali, ossia $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$.
 - (c) Provare che $V_i = Ae_i$ sono due G -sottomoduli di dimensione 1 di A pensato come modulo regolare.
3. Sia G il gruppo ciclico generato da $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $V = \mathbb{C}^2$ il relativo modulo naturale.
 - (a) Mostrare che $|G| = 4$.
 - (b) Dimostrare che $\langle v, w \rangle = \frac{1}{4} \sum_{g \in G} vg \cdot wg$, ove $v \cdot w$ è il consueto prodotto scalare, definisce una funzione bilineare G -invariante (ossia $\langle vx, wx \rangle = \langle v, w \rangle$ per ogni $x \in G, v, w \in V$);
 - (c) Sia $W = \mathbb{C}w, w = (1, i)$. Determinare W^\perp e mostrare che $V = W \oplus W^\perp$.