E1: $\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1 = \binom{2}{2}^2$ $P(1)$ è vera

$$-\binom{n+1}{2}^2 + \binom{n+2}{2}^2 = \frac{(n+2)^2(n+1)^2}{4} - \frac{(n+1)^2 n^2}{4} = \frac{(n+1)^2}{4} \cdot n^2+4n+4-n^2 =$$

$$=(n+1)^3$$

quindi $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

E2: $e = \underset{g\in \mathbb{Z}/48^*}{\text{mcm}} \{k_g : k_g \text{ ordine di } g\}$ Ora $\varphi(48)=16$ quindi

$e \mid 16$ $\quad (\mathbb{Z}/48)^* \simeq (\mathbb{Z}/16)^* \times (\mathbb{Z}/3)^* \simeq \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2$

quindi $e = \max(2,4,2) = 4$

E3: Sia $1 \neq d = MCD(a,24)$ $\quad a = da_1$ $\quad 24 = dr$ Allora

$ar = 24a_1 \equiv_{24} 0$ e a è divisore dello zero

quindi a è unità sse $MCD(a,24)=1$, divisore dello zero altrimenti

E4: $f(r/s)=0$, $r,s \in \mathbb{Z}$, solo se $s \mid f_0$ e $r \mid f_n$ ove $f(x) = \sum_0^n f_i x^i$

Quindi x^4-4x^2+5 ammette $\pm1, \pm2$ come radici in $\mathbb{Q}$

x^4+2x^2+4 Non " " " "

x^4-5x^2+5 " " " " "

Per Ruffini $x^4-4x^2+5 = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2$

$g=x^4+2x^2+4$ è irriducibile $\Leftrightarrow$ non ha fattori di grado 2. Sia $g=hf$

Ora $g \bmod 2 = x^4$ allora $h \bmod 2 = x^2 = f \bmod 2$

$$g = (x^2+2ax+2b)(x^2+2cx+2d) \quad a,b,c,d \in \mathbb{Z}$$

Per cui $c=-a$, $2b+2d+4ac=2$, $4(ad+bc)=0$, $bd=1$

$b=d=\pm1$ $\quad 4b+4ac=2$ Assurdo

Infine x^4-5x^2+5 è irr. per criterio Eisenstein con $p=5$