RACCOLTA DI ESERCIZI PER IL CORSO DI ALGEBRA

ANDREA PREVITALI

ABSTRACT. Viene di seguito riportata una serie di esercizi con risoluzione per il corso di Algebra del primo anno.

1. FUNZIONI

Indichiamo con A^B l'insieme delle funzioni da A in B, con $\mathrm{End}(X)$ l'insieme X^X i cui elementi vengono detti endofunzioni. Con $\mathrm{Mon}(A,B)$ e $\mathrm{Epi}(A,B)$ intendiamo le mappe iniettive e suriettive da A a B.

Esercizio 1.1. *Date $g \in B^A$ e $f \in A^B$, dimostrare che $fg = \mathrm{id}_A$ implica g iniettiva e f suriettiva. Viceversa data una mappa suriettiva $f \in A^B$, esiste una mappa iniettiva $g \in B^A$ tale che $fg = \mathrm{id}_A$ e analogamente data una mappa iniettiva $g \in B^A$, esiste una mappa suriettiva $f \in A^B$ tale che $fg = \mathrm{id}_A$.*

Svolgimento: Sia $g(a) = g(a')$, applicando f si ottiene $a = fg(a) = fg(a') = a'$ e g è è iniettiva. Inoltre dato $a \in A$, $a = f(g(a))$ e f è suriettiva. Sia ora $g \in B^A$ iniettiva e si definisca f come segue:

$$f(b) = \begin{cases} a & \text{se } b = g(a) \\ c & \text{altrimenti} \end{cases},$$

dove c è un qualsiasi elemento di A. Si noti che f è una funzione poiché dato $b \in g(A)$ esiste un unico a tale che $b = g(a)$. È immediato provare che $fg = \mathrm{id}_A$. Sia ora data $f \in A^B$ suriettiva e si indichi con $f^{-1}(a)$ l'insieme delle controimmagini di a, ossia $\{b \in B \mid f(b) = a\}$. Per ipotesi $f^{-1}(a) \neq \emptyset$. Inoltre se $a \neq a'$, allora $f^{-1}(a) \cap f^{-1}(a') = \emptyset$. Si scelga da ognuno di questi insiemi disgiunti uno ed un solo elemento. In tal modo si costruisce una funzione g, ove $g(a)$ è l'unico elemento scelto di $f^{-1}(a)$. Ovviamente $fg = \mathrm{id}_A$. Resta da dimostrare che le due funzioni costruite sono rispettivamente suriettiva e iniettiva ma ciò segue dall'identità $fg = \mathrm{id}_A$. q.e.d.

Esercizio 1.2. *Provare che $f \in A^B$ è iniettiva sse per ogni coppia di funzioni $u, v \in B^C$, $fu = fv$ implica $u = v$ (si dice che f è cancellabile a sinistra). Analogamente $g \in A^B$ è suriettiva sse per ogni coppia di funzioni $u, v \in C^A$, $ug = vg$ implica $u = v$ (si dice che g è cancellabile a destra).*

Svolgimento: Siano $u, v \in B^C$ tali che $fu = fv$. Allora $fu(c) = fv(c)$, per ogni $c \in C$. Se f è iniettiva, allora $u(c) = v(c)$ e $u = v$ per il principio di estensionalità. Viceversa sia f non iniettiva, allora esistono $b \neq b' \in B$ tali che $f(b) = f(b')$. Siano $u, v \in B^B$ definite da $v(B) = \{b\}$ e $u(B) = \{b'\}$, cioè u e v sono mappe costanti su B. Per ipotesi $fu = fv$, ma $u \neq v$. Sia ora $g \in A^B$ suriettiva e sia $ug = vg$, per $u, v \in C^A$. Siccome $g(B) = A$, ne segue che $u(a) = v(a)$ per ogni $a \in A$, cioè $u = v$. Viceversa

Date: Mercoledì, 2 Ottobre 2001.
Key words and phrases. Esercizi di Algebra.
Supportato dai fondi di incentivazione per la Didattica.

supponiamo che g non sia suriettiva, allora $A \setminus g(B) \neq \emptyset$. Si ponga $ug(b) = vg(b) = 0$, per ogni $b \in B$ e $u(a) = 1$, $v(a) = 2$ per ogni $a \notin g(B)$. Allora $u \neq v$, mentre $ug = vg$. q.e.d.

Esercizio 1.3. *Dato un insieme finito X, dimostrare che $f \in \mathrm{End}(X)$ è iniettiva sse è invertibile. Mostrare inoltre che la sua inversa è della forma f^k per qualche intero positivo k.*

Svolgimento: È chiaro che l'invertibilità implica l'iniettività. Basta quindi mostrare che un'endofunzione iniettiva su un insieme finito è suriettiva. Forniamo due prove:

(1) Sia f iniettiva, allora $|f(X)| = X$. Ma $f(X) \subseteq X$, allora $f(X) = X$;
(2) sia $x \in X$ e si consideri l'insieme $I = \{f^i(x) \mid i \in \mathbb{N}\}$. Poiché X è finito, devono esistere n, m due interi distinti tali che $f^n(x) = f^m(x)$. Supponiamo che $n > m$. Siccome f è iniettiva si può cancellare a sinistra e quindi $f^{n-m}(x) = x$ da cui $b = f^{n-m-1}(x)$ soddisfa $f(b) = a$. Siccome x era arbitrario, ne segue che f è suriettiva.

Quindi esiste un intero positivo $l = l(x)$ tale che $f^l(x) = x$. Sia m il minimo comune multiplo di tutti questi interi al variare di x in X, allora

$$f^m(x) = f^{m-l(x)} f^{l(x)}(x) = f^{m-l(x)}(x).$$

Ripetendo questo passo otteniamo che $f^m(x) = x$, quindi basta prendere $k = m-1$. q.e.d.

Esercizio 1.4. *Mostrare con un controesempio che esistono endofunzioni su insiemi infiniti che sono suriettive ma non iniettive e viceversa. Si mostri che esistono funzioni che ammettono inversa a destra ma non a sinistra.*

Svolgimento: Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{N})$ definita da $f : x \mapsto x + 1$, allora f è iniettiva ma non suriettiva. Sia $g \in \mathrm{End}(\mathbb{N})$ definita da:

$$g(n) = \begin{cases} n-1 & \text{se } n \geq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

allora g è suriettiva ma non è iniettiva. Si noti che $gf = \mathrm{id}$, mentre $fg \neq \mathrm{id}$, infatti $fg(0) = 1$. Quindi f ammette inversa sinistra ma non destra, altrimenti sarebbe invertibile . q.e.d.

Esercizio 1.5. *Determinare una funzione invertibile $f \in X^X$ la cui inversa non si esprime come iterata di f (ossia $f^{-1} \neq f^n$, per ogni intero n).*

Svolgimento: Mostriamo due esempi:

(1) $f \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ definita da $f(x) = x+1$. Allora $f^{-1}(a) = a-1$, mentre $f^n(a) = a+n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$;
(2) sia $f \in I^I$, ove $I = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ è l'intervallo unitario dei numeri reali, definita da $f(x) = x^2$. Allora $f^n(x) = x^{2^n}$ mentre $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Se fosse $f^n = f^{-1}$, allora $x^{2^{n+1}} = x$. Ma le uniche soluzioni della precedente equazione sono 0 e 1 . q.e.d.

Esercizio 1.6. *Se $f \in B^A$ e $g \in C^B$ sono entrambe suriettive (iniettive), allora lo stesso vale per gf. Se gf è suriettiva (iniettiva) cosa possiamo concludere su f, g?*

Svolgimento: Siano f, g suriettive, allora $g(f(A)) = g(B) = C$ e gf è suriettiva. Siano f, g iniettive, allora sono cancellabili a sinistra per cui da $gf(a) = gf(a')$ segue

$f(a) = f(a')$ e $a = a'$, per cui gf è iniettiva. Se gf è iniettiva, allora f e deve essere iniettiva. Altrimenti esisterebbero $a \neq a'$ tali che $f(a) = f(a')$, da cui $gf(a) = gf(a')$, contro l'iniettività di gf. Sia $A = C = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$, $f(1) = 1$ e $g(1) = g(2) = 1$. Allora gf è iniettiva mentre g no. Analogamente gf suriettiva implica che g debba essere suriettiva, mentre f potrebbe non esserlo. Ad esempio siano $A = B\{1, 2, 3\}$, $C = \{1\}$ e si definisca $f(1) = f(2) = 1$, $f(3) = 2$, $g(1) = g(2) = 1$, allora gf è suriettiva ma f no . q.e.d.

Esercizio 1.7. *Siano $f \in B^A$, $g \in C^B$ e $h \in A^C$ tali che $hgf = \mathrm{id}_A$, $fhg = \mathrm{id}_B$ e $gfh = \mathrm{id}_C$. Si mostri che f, g, h sono biezioni e determinarne le inverse.*

Svolgimento: Visto il ruolo simmetrico basta mostrare l'asserto per f. Ora $hgf = \mathrm{id}_A$, $fhg = \mathrm{id}_B$ implicano che l'inversa di f è hg . q.e.d.

Esercizio 1.8. *Ricordiamo che g è un'inversa destra per f se $fg = \mathrm{id}_B$. Mostrare che se $|\mathrm{Dom} f| \geq 2$, allora f è una biezione sse ammette una sola inversa a destra sse ammette una sola inversa sinistra.*

Svolgimento: Se $f \in B^A$ è una biezione, sia g una sua inversa e g' una sua inversa destra, allora $g = g(fg') = (gf)g' = g'$, da cui ho unicità. Viceversa sia $fg = \mathrm{id}_B$. Se f non è biettiva, allora f non è iniettiva, ossia esistono $a \neq a' \in T$ tali che $f(a) = f(a')$. Si osservi che se a, a' appartenessero a $g(S)$, allora $a = g(b)$ e $a' = g(b')$, ne seguirebbe $b = fg(b) = f(a) = f(a') = fg(b') = b'$ e $a = f(b) = f(b') = a'$, quindi $a' \notin g(B)$. Si definisca $g' \in A^B$ come segue:

$$g'(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \neq b \\ a' & \text{se } x = b \end{cases} .$$

Si noti che la definizione di g' è consistente. Inoltre $fg = fg' = \mathrm{id}_A$ e $g(b) \neq g'(b)$. Sia infine $gf = \mathrm{id}_A$, ma f non sia suriettiva, allora esiste $b \in B \setminus f(A)$ e si definisca g' tale che $g'(b) \neq g(b)$ e $g'(x) = g(x)$ per $x \neq b$. In particolare $g'f = gf = \mathrm{id}_A$ essendo $\{b\}^c \supseteq f(A)$. q.e.d.

Dipartimento di Scienze CC. FF. e MM., Università degli Studi dell'Insubria, Via Valleggio 10, 22100-Como, Italy

E-mail address: andrea.previtali@uninsubria.it