

ESERCIZI TEORIA DEI GRUPPI FOGLIO 10

- (1) Due G -insiemi X, Y diconsi simili se esiste una biezione $\phi : X \rightarrow Y$ e $\eta \in \text{Aut}(G)$ tali che

$$xg\phi = x\phi g^\eta.$$

(In notazione da analista $\phi(xg) = \phi(x)\eta(g)$.) Sia $X = \Omega_H, Y = \Omega_K$.

- (a) Provare che se X è simile tramite ϕ, η a Y , allora $H^\phi = Kt$, per qualche $t \in G$;
(b) Provare che ϕ è ben posta sse $th^\eta t^{-1} \in K$;
(c) Dedurre che $H^{\eta t^{-1}} \leq K$;
(d) Provare che ϕ è iniettiva sse $K \leq H^{\eta t^{-1}}$;
(e) Dedurre che ϕ definisce una biezione sse $K = H^{\eta t^{-1}}$;
(f) Mostrare che $(Hg)^\phi = Ktg^\eta$ definisce una similitudine tra X e Y
- (2) Sia G il gruppo delle isometrie di un tetraedro T .
(a) Provare che G agisce transitivamente sui 4 vertici di T ;
(b) Dimostrare che tale azione è fedele;
(c) Provare che lo stabilizzante G_v di un vertice è isomorfo a $\text{Sym}(3)$;
(d) Dedurre che $|G| = 24$ e che G è isomorfo a $\text{Sym}(4)$;
- (3) Sia G un gruppo di ordine 9.
(a) Provare che se G ammette un elemento di ordine 9, allora è ciclico;
(b) Altrimenti sia $A = \langle a \rangle$, un sottogruppo di ordine 3. Provare che esiste B complemento di A in G , ossia $G = AB, 1 = A \cap B$;
(c) Provare che G è isomorfo a C_9 oppure a $C_3 \times C_3$.

E-mail address: andrea.previtali@uninsubria.it

Webpage: <http://scienze-como.uninsubria.it/previtali>

Date: May 20, 2009.

©Andrea Previtali

Per questioni username=CorsoAlgebraUnoComo@gmail.com passwd=algebrauno.