ESERCIZI TEORIA DEI GRUPPI FOGLIO 4

(1) Sia $G = Sym(3)$ il gruppo simmetrico su 3 elementi.
  (a) Mostrare che la mappa di coniugio definisce un omomorfismo tra G e $Sym(G)$.
  (b) Determinare l'ordine di γ_τ ove $\tau \in \{(2,3),(1,2,3)\}$
  (c) Provare che in generale $o(\gamma_g)$ divide $o(g)$.
  (d) Determinare $o(\tau)$ e $o(\tau^{(1,2)})$ ove $\tau \in \{(2,3),(1,2,3)\}$.

(2) Sia $G = Sym(4)$.
  (a) Mostrare che $V = \langle (12)(34), (13)(24) \rangle$ è un sottogruppo normale di G.
  (b) Provare che $T = \langle (1234), (24) \rangle$ è isomorfo a D_8.
  (c) Calcolare tutti i sottogruppi coniugati di T in G.
  (d) Mostrare che in generale sottogruppi coniugati sono isomorfi.
  (e) Costruire un gruppo G avente due sottogruppi H, K isomorfi ma NON coniugati. Perché G non può essere ciclico?

(3) Sia $G = D_{10}$.
  (a) Mostrare che R, il sottogruppo delle rotazioni è normale.
  (b) Determinare l'insieme N degli elementi g di G tali che $g^{-1}Bg = B$, ove $B = \langle b \rangle$, b la riflessione rispetto ad un asse.
  (c) Provare che N è un sottogruppo di G.
  (d) Generalizzare il precedente punto.

(4) Sia G l'insieme delle matrici $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$, ove $a, b \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$.
  (a) Mostrare che G è un gruppo.
  (b) Provare che $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{Z} \right\}$ è un sottogruppo di G isomorfo a $(\mathbb{Z}, +)$.
  (c) Sia $a = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Mostrare che $H^a < H$, ossia H^a è un sottogruppo PROPRIO di H.
  (d) Dedurre che H non è normale in G.
  (e) Dedurre che $H^g \leq H$ NON implica in generale $H^g = H$.
  (f) Sia $H_i := H^{a^i}$. Mostrare che $H_i > H_{i+1}$ per ogni $i \in \mathbb{Z}$, ossia

$$\cdots < H_1 < H_0 = H < H_{-1} < \cdots$$

  si estende indefinitamente in tutte e due le direzioni.

E-mail address: andrea.previtali@uninsubria.it

Webpage: http://scienze-como.uninsubria.it/previtali
