ESERCIZI TEORIA DEI GRUPPI FOGLIO 5

(1) Sia H un sottogruppo di G.
  (a) Mostrare che aRb sse $ab^{-1} \in H$ e aLb sse $a^{-1}b \in H$ definiscono relazioni di equivalenza su G.
  (b) Provare che le classi di equivalenza dell'elemento a sono rispettivamente Ha e aH.
  (c) Provare che H è un sottogruppo normale sse $R = L$ sse $aH = Ha$ per ogni $a \in G$.
  (d) Dedurre che se $|G : H| = 2$, allora H è normale in G.

(2) Sia $G = GL_2(\mathbb{Q})$ il gruppo delle matrici invertibili di grado due sui razionali.
  (a) Mostrare che aEb sse $\det a = \det b$ definisce una congruenza su G.
  (b) Provare il sottoinsieme S costituito dalle matrici con determinante 1 è un sottogruppo normale di G.
  (c) Calcolare la congrunze E_S indotta da S.
  (d) Provare che $E = E_S$.
  (e) Provare il gruppo quoziente G/S è isomorfo al gruppo moltiplicativo dei razionali Q^*.

(3) Siano $a = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $G = \langle a, b \rangle$.
  (a) Mostrare che $a^2 = b^2 = -I$ e che $a^b = a^{-1}$.
  (b) Provare che ogni elemento di G si scrive in un solo modo come $a^i b^j$, ove $i \in \mathbb{Z}/4$ e $j \in \mathbb{Z}/2$.
  (c) Dedurre che $|G| = 8$.
  (d) Calcolare la rappresentazione regolare di G.
  (e) Mostrare che G ammette un unico sottogruppo di ordine d con $d = 1, 2, 8$ e tre sottogruppi di ordine 4.
  (f) Provare che G non è abeliano ma tutti i suoi sottogruppi sono normali.

E-mail address: `andrea.previtali@uninsubria.it`

Webpage: `http://scienze-como.uninsubria.it/previtali`