

ESERCIZI TEORIA DEI GRUPPI FOGLIO 7

- (1) Sia $\pi : G \rightarrow H$ un omomorfismo suriettivo (epimorfismo) di gruppi. Per ogni sottoinsieme S di H sia $\pi^{-1}(S) = \{g \in G : \pi(g) \in S\}$.
- (a) Provare che se $K \leq H$, allora $\pi^{-1}(K) \leq G$;
 - (b) Mostrare che se $L \leq G$, allora $\pi^{-1}(\pi(L)) = NL$, ove $N = \ker \pi$;
 - (c) Provare che $|\pi^{-1}(K) : \pi^{-1}(M)| = |K : M|$, ove $M \leq K \leq H$.
- (2) Sia $G = \mathbb{Z}$ dotato della struttura di gruppo additivo, $K = 2G$, $H = 6G$.
- (a) Provare che $H \trianglelefteq K$, $K \trianglelefteq G$ e $H \trianglelefteq G$;
 - (b) Mostrare che G/H , G/K e K/H sono isomorfi alle classi di resto modulo 6, 2 e 3;
 - (c) Provare che $(G/H)/(K/H)$ è isomorfo a G/K .
- (3) Sia $G = GL_2(7)$, il gruppo delle matrici invertibili sulle classi di resto modulo 7. Sia $S = \ker \det$.
- (a) Provare che $S \trianglelefteq G$;
 - (b) Mostrare che $|G : S| = 6$;
 - (c) Trovare un isomorfismo tra G/S e un gruppo ciclico di ordine 6;
 - (d) Determinare tutti i sottogruppi $S \leq L \leq G$.

E-mail address: andrea.previtali@uninsubria.it

Webpage: <http://scienze-como.uninsubria.it/previtali>

Date: April 30, 2009.

©Andrea Previtali

Per questioni username=CorsoAlgebraUnoComo@gmail.com passwd=algebrauno.