ESERCIZI TEORIA DI RAPPRESENTAZIONE DEI GRUPPI FOGLIO 2

(1) Sia $G = C_3$ il gruppo ciclico di ordine 3 e $V = \mathbb{C}^G$ lo spazio vettoriale delle funzioni da G in $\mathbb{C}$.
   (a) Descrivere esplicitamente l'azione regolare di G su V.
   (b) Determinare una rappresentazione R che realizza tale azione rispetto alla base ordinata (x_1, x_a, x_{a^2}), ove a denota un generatore di G.
   (c) Analoghe richieste ma rispetto alle basi (x_a, x_{a^2}, x_1) e $(x_1, x_a + x_{a^2}, x_a - x_{a^2})$.
   (d) Provare che le tre rappresentazioni ottenute sono equivalente a due a due ed esibire le matrici che coniugano una nell'altra.

(2) Sia K un campo e A_5 il gruppo alterno su 5 elementi.
   (a) Mostrare che $a = (1, 2, 3)$ e $b = (1, 2, 3, 4, 5)$ appartengono ad A_5.
   (b) Sia $G = \langle a, b\rangle$. Provare che $15 | |G|$.
   (c) Mostrare che $b[a, b]$ e b^2a hanno ordine 2.
   (d) Dedurre che $G = A_5$.
   (e) Provare che $a^3 = (b^4a)^3 = (b^2a)^2 = b^5 = 1$.
   (f) Siano $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
   Assumendo che A_5 sia presentato dalle precedenti relazioni, provare che $R(a) := A$ e $R(b) := B$ si estende ad una rappresentazione di A_5 in $\mathrm{GL}_4(K)$.

E-mail address: `andrea.previtali@uninsubria.it`

Webpage: `http://scienze-como.uninsubria.it/previtali`