

**ESERCIZI TEORIA DI RAPPRESENTAZIONE DEI  
GRUPPI FOGLIO 3**

- (1) Sia  $G = C_3$  il gruppo ciclico di ordine 3 e  $V = \mathbb{C}^G$  il modulo regolare sui complessi.
- (a) Provare che  $V$  è riducibile.
  - (b) Dimostrare che  $V$  ammette 3 sottomoduli  $U_i$  di dimensione 1.
  - (c) Provare che i sottomoduli di dimensione due hanno forma  $U_i \oplus U_j$ ,  $i \neq j$ .
  - (d) Mostrare che  $V = \bigoplus U_i$  e dedurre che  $V$  induce una rappresentazione  $R$  tale che  $R(g)$  è diagonale per ogni  $g \in G$ .
  - (e) Analizzare le analoghe questioni su  $\mathbb{F}_p$  ove  $p = 2, 3$ .
- (2) Sia  $G = S_5$  il gruppo simmetrico su 5 elementi e sia  $V$  il modulo di permutazione su  $\mathbb{Q}$ .
- (a) Descrivere le matrici corrispondenti ad  $a = (1, 2)$  e  $b = (1, 2, 3, 4, 5)$  rispetto alla base standard.
  - (b) Provare che  $U = \langle (1, 1, 1, 1, 1) \rangle$  e  $W = \langle e_i - e_{i+1} \mid 1 \leq i \leq 4 \rangle$  sono sottomoduli di  $V$ .
  - (c) Provare che  $U \cap W = 0$  e dedurre che  $V = U \oplus W$ .
  - (d) Provare che sostituendo  $\mathbb{Q}$  con  $\mathbb{F}_5$ , allora  $U \leq W$  (mentre  $W$  su  $\mathbb{Q}$  è irriducibile).

*E-mail address:* [andrea.previtali@uninsubria.it](mailto:andrea.previtali@uninsubria.it)

*Webpage:* <http://scienze-como.uninsubria.it/previtali>

---

©Andrea Previtali

Per questioni username=CorsoAlgebraDueComo@gmail.com passwd=algebradue.