ESERCIZI TEORIA DI RAPPRESENTAZIONE DEI GRUPPI FOGLIO 4

(1) Siano K campo e M, N due matrici in $(K)_{a+b}$, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$, ove i blocchi diagonali hanno ordine a e b.
   (a) Provare che $AE + BG$ è definita e appartiene a $(K)_a$.
   (b) Dimostrare che $(AE+BG)_{ij} = (AE)_{ij} + (BG)_{ij} = \sum_r a_{ir}e_{rj} + b_{ir}g_{rj}$.
   (c) Dedurre che $(MN)_{ij} = (AE + BG)_{ij}$ per $1 \leq i, j \leq a$.
   (d) Dimostrare che $MN = \begin{pmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{pmatrix}$.

(2) Sia $D \in (R)_n$, R anello commutativo.
   Allora $\det(D) = \sum_{\sigma \in Sym(n)} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} d_{i\sigma(i)}$ definisce la funzione determinante da $(R)_n$ in R.
   Sia $n = 5$, $D = \begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}$ con blocchi diagonali di ordine 2 e 3, $I = \{1, 2\}$ e $J = \{3, 4, 5\}$.
   (a) Provare che $\sigma(I) \neq I$ sse $\sigma(J) \neq J$, $\sigma \in Sym(5)$.
   (b) Mostrare che se $\sigma(I) \neq I$ allora $\prod_{i=1}^{5} d_{i\sigma(i)} = 0$.
   (c) Provare che $\phi : Sym(5) \to Sym(I) \times Sym(J)$, $phi(\sigma) = (\sigma_I, \sigma_J)$ realizza un isomorfismo tra gli elementi F di $Sym(5)$ che fissano I e $Sym(I) \times Sym(J)$, ove σ_I denota la restrizione di σ a I.
   (d) Mostrare che per tali elementi $\sigma = \sigma_I \sigma_J$.
   (e) Provare che $\det(D) = \sum_{\sigma \in F}(\sigma) \prod_{i=1}^{5} d_{i\sigma(i)}$.
   (f) Dedurre che $\det(D) = \det(A)\det(B)$.
   (g) Ottenere la stessa conclusione applicando lo sviluppo di Laplace rispetto alla prima riga di D.

E-mail address: `andrea.previtali@uninsubria.it`

Webpage: `http://scienze-como.uninsubria.it/previtali`

Per questioni username=CorsoAlgebraDueComo@gmail.com passwd=algebradue.