

**ESERCIZI TEORIA DI RAPPRESENTAZIONE DEI
GRUPPI FOGLIO 7**

- (1) Sia G un gruppo, F un campo, $A = FG$ l'algebra gruppo ed R la rappresentazione regolare.
- (a) Provare che se $a \in A$ è divisore dello zero in A , allora $R(a)$ è divisore dello zero in $(F)_n$, $n = |G|$;
 - (b) Dedurre che se $a \in A$ è divisore dello zero in A , allora $R(a)$ è una matrice singolare;
 - (c) Viceversa, sia $a \in A$ tale che $R(a)$ è singolare. Mostrare che esiste $0 \neq v \in V = FG$ tale che $vR(a) = 0$, quindi $va = 0$ e a è divisore dello zero.
 - (d) Dedurre che per G ciclico di ordine 3 generato da g , $ae + bg + cg^2$ è divisore dello zero sse $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$;
 - (e) Provare che sui complessi
$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a + \omega b + \omega^2 c)(a + \omega^2 b + \omega c),$$
ove $\omega^3 = 1$;
 - (f) Dedurre che i divisori dello zero si ottengono come unione di 3 piani in \mathbb{C}^3 .
- (2) Dati a_0, \dots, a_n in F , sia $V = V(a_0, \dots, a_n) \in (F)_{n+1}$ tale che $v_{ij} = a_i^j$.
- (a) Provare che $\det V(a_0, \dots, a_n) = \prod_{i>j} (a_i - a_j) \det V(a_1, \dots, a_n)$.
 - (b) Dedurre che $\det V(a_0, \dots, a_n) = \prod_{n \geq j > i \geq 0} (a_i - a_j)$.
 - (c) Provare che $V(a_0, \dots, a_n)$ è non singolare sse gli a_i sono tutti distinti.
 - (d) Supponiamo che esista in F ω una radice primitiva $n + 1$ -sima di 1_F . Provare che $\sum_{k=0}^n \omega^{rk} \omega^{-sk} = (n + 1) \delta_{rs}$.
 - (e) Dedurre che $V(\omega^0, \dots, \omega^n)^{-1} = \frac{1}{n+1} V(\eta^0, \dots, \eta^n)$, ove $\omega \eta = 1$.
 - (f) Sia G ciclico di ordine $n + 1$ generato da g . Provare che $\{e_i\}$, $e_i = \sum_{j=0}^n \omega^{ij} g^j$, $j = 0, \dots, n$ è una F -base per FG .
 - (g) Determinare la rappresentazione indotta dal modulo regolare FG rispetto a questa base.

E-mail address: andrea.previtali@uninsubria.it

Webpage: <http://scienze-como.uninsubria.it/previtali>

Date: April 30, 2009.

©Andrea Previtali

Per questioni username=CorsoAlgebraDueComo@gmail.com passwd=algebradue.