

**ESERCIZI TEORIA DI RAPPRESENTAZIONE DEI
GRUPPI FOGLIO 8**

- (1) Sia E_{ij} la matrice elementare avente 1 in posizione (i, j) , 0 altrove. $G = \langle a, b : a^2 = b^2, a^b = a^3 \rangle$ il gruppo dei quaternioni.
- (a) Provare che $R(a) = E_{12} - E_{21} - E_{34} + E_{43}$ e $R(b) = E_{13} + E_{24} - E_{31} - E_{42}$ definisce una rappresentazione di G in $GL_4(\mathbb{Q})$;
 - (b) Dimostrare che $E = \text{End}_G(V)$ ha dimensione 4, ove V è il modulo naturale per $R(G)$;
 - (c) Provare che E è un anello con divisione;
 - (d) Stesse questioni sul campo dei complessi.
- (2) Sia $G = \langle g : g^n = 1 \rangle$ il gruppo ciclico di ordine n , $\omega \in \mathbb{C}$ una radice n -sima primitiva.
- (a) Mostrare che il modulo regolare $V = \mathbb{C}G = \bigoplus_{i=0}^{n-1} U_{\omega^i}$ ove $u \in U_{\omega^i}$ sse $ug = \omega^i u$;
 - (b) Provare che $E = \text{End}_G(V) = \mathbb{C}G$;
 - (c) Sia $\epsilon_i = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{-ij} g^j$, allora $\epsilon_i \epsilon_j = \delta_{ij} \epsilon_i$, $\sum \epsilon_i = 1$;
 - (d) Provare che $\mathbb{C}G = \bigoplus \mathbb{C} \epsilon_i \simeq \bigoplus \mathbb{C}$ come prodotto diretto di anelli.
- (3) Sia $G = \langle g \rangle$ ciclico di ordine 4, $F = \mathbb{Q}$.
- (a) Provare che $R(g) = E_{12} - E_{21}$ definisce una rappresentazione irriducibile di G ;
 - (b) Spiegare perché questo risultato non è in contraddizione col teorema che asserisce che i moduli irriducibili per un gruppo abeliano hanno dimensione 1.

E-mail address: andrea.previtali@uninsubria.it

Webpage: <http://scienze-como.uninsubria.it/previtali>

Date: May 12, 2010.

©Andrea Previtali

Per questioni username=CorsoAlgebraDueComo@gmail.com passwd=algebradue.