ESERCIZI TEORIA DI RAPPRESENTAZIONE DEI GRUPPI FOGLIO 9

(1) Sia $G = C_p = \langle g \rangle$ un gruppo ciclico con un numero primo p di elementi, $F = \mathbb{F}_p$.
   (a) Provare che $R(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ definisce una rappresentazione di G in $\mathrm{GL}_2(F)$;
   (b) Dimostrare che $E = \mathrm{End}_G(V)$ ha dimensione 2, ove V è il modulo naturale per $R(G)$;
   (c) Determinare un elemento $z \in E$, tale che $z^2 = 0 \neq z$ (z viene detto un elemento nilpotente);
   (d) Dedurre che E non è un anello con divisione.

(2) Sia $A = C_4 \times C_2 = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $i \in \mathbb{C}$ l'unità immaginaria. $\alpha(a) = i$, $\alpha(b) = 1$, $\beta(a) = 1$, $\beta(b) = -1$
   (a) Mostrare che $\hat{A} = \langle \alpha \rangle \times \langle \beta \rangle$
   (b) Calcolare $\alpha^2\beta(ab)$;
   (c) Determinare $K = \ker \alpha^2\beta$;
   (d) Provare che A/K è ciclico.

(3) Sia $G = C_{n_1} \times \ldots \times C_{n_r}$ il prodotto diretto di r gruppi ciclici.
   (a) Provare che $R(g) = diag(\eta_1, \ldots, \eta_r)$, ove $\eta_i = \exp(2\pi i/n_i)$, definisce una rappresentazione fedele di G di grado r;
   (b) Sia $G = C_a \times C_b$, con $a \perp b$. Mostrare che G ammette una rappresentazione fedele di grado 1;
   (c) Mostrare che se a divide b, G non ammette rappresentazioni fedeli di grado 1;

E-mail address: `andrea.previtali@uninsubria.it`

Webpage: `http://scienze-como.uninsubria.it/previtali`

Date: May 18, 2009.
©Andrea Previtali
Per questioni username=CorsoAlgebraDueComo@gmail.com passwd=algebradue.