ESERCIZI TEORIA DI GALOIS FOGLIO 1

(1) Sia K un campo e x una variabile.
   (a) Costruire una biezione tra $A = K[[x]]$ l'insieme delle serie di potenze e $K^{\mathbb{N}}$.
   (b) Provare che $K[[x]]$ diventa un anello rispetto alla somma puntuale e al prodotto di Cauchy $c := a * b$ sse $c_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}$.
   (c) Provare che un elemento $a = \sum_0^\infty a_i x^i$ di A è invertibile sse $a_0 \neq 0$.
   (d) Mostrare che $K((x))$, l'insieme delle serie di Laurent, ossia
   $$\{a \in K^{\mathbb{Z}} \,|\, a(i) = 0 \quad \text{se} \quad i < m = m(a)\}$$
   è il campo dei quozienti di A.
   (e) Costruire un'immersione (monomorfismo) di $K(x)$ in $K((x))$.

(2) Sia F/K un'estensione. Provare che $\alpha \in F$ è trascendente su K sse $K[\alpha] \simeq K[x]$

(3) Sia F un campo algebrico numerico, ossia un'estensione finita di $\mathbb{Q}$. Un elemento a di F si dice un intero algebrico se a è radice di un polinomio monico in $\mathbb{Z}[x]$. Provare che $\mathbb{Z}_F$, l'insieme degli interi algebrici di $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ è un anello. Provare che in generale non è un campo.

(4) Provare che $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$.

(5) Provare che se $F : \mathbb{Q}| = 2$ esiste $a \in F \setminus \mathbb{Q}$ tale che $a^2 \in \mathbb{Q}$. Cosa accade se sostituisco $\mathbb{Q}$ con $\mathbb{F}_2$?

(6) Trovare estensione F/K con $|F : K| = 3$ ma priva di elementi $a \in F$ tali che $F = K[a]$ e $a^3 \in K$.

E-mail address: andrea.previtali@uninsubria.it

Webpage: http://scienze-como.uninsubria.it/previtali

Date: April 2, 2009.