ESERCIZI TEORIA DI GALOIS FOGLIO 2

(1) Sia $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.
  (a) Provare che $|\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}| = |\mathbb{Q}(\sqrt{3}) : \mathbb{Q}| = 2$ (estensioni quadratiche).
  (b) Dedurre che $|\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}| | 4$.
  (c) Provare che tale grado vale esattamente 4.
  (d) Dedurre che $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ (estensione semplice).
  (e) Calcolare il polinomio di α su $\mathbb{Q}$ e su $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

(2) Sia p un primo e $F = \mathbb{F}_p$ il campo con p elementi e $K = \mathbb{F}_{p^p}$.
  (a) Mostrare che $\wp : a \mapsto a^p - a$ definisce un mappa F-lineare da K in sé.
  (b) Determinare $\ker \wp$ e dedurre che $\wp$ non è suriettiva.
  (c) Mostrare che $f := x^p - x + 1$ è irriducibile in $F[x]$
  (d) Provare f ammette una radice $\alpha \in K$ e che $f(x) = \prod_{i \in F}(x - \alpha - i)$ in $K[x]$.

(3) Sia $F = \mathbb{F}_q$, $q = p^a$, p primo e ϕ l'automorpfismo di Frobenius $f^\phi = f^p$
  (a) Provare che ϕ si estende in modo unico ad un automorfismo di $F[x]$ imponendo $x^\phi = x$.
  (b) Mostrare che $(\prod_{u \in U}(x - u))^\phi = \prod_{u \in U}(x - u^\phi)$.
  (c) Dedurre che $m(x) = \prod_{0 \le i \le a-1}(x - u^{p^i})$ coincide con $m(x)^\phi$ e quindi $m(x) \in \mathbb{F}_p[x]$.
  (d) Dedurre che $\mathrm{Aut}(F) = \langle \phi \rangle$.

(4) Trovare due estensioni L_i/F tali che $|L_1 L_2 : F| < |L_1 : F||L_2 : F|$ (possibilmente distinte).

(5) Provare che $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ non sono isomorfi come campi ma lo sono come $\mathbb{Q}$-spazi vettoriali.

E-mail address: andrea.previtali@uninsubria.it

Webpage: http://scienze-como.uninsubria.it/previtali