ESERCIZI TEORIA DI GALOIS FOGLIO 3

(1) Sia $K = \mathbb{Q}$, $R = K[x]$ e $F = K(x)$.
   (a) Provare che $A := Aut(K[x]) = \{\tau_{a,b} : x \mapsto ax+b \mid K \ni b, a \neq 0\}$.
   (b) Mostrare che A è isomorfo al sottogruppo di $GL_2(K)$ delle matrici $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$
   (c) Dedurre che A è il prodotto semidiretto $K^* \rtimes K$ e descrivere l'azione di K su K^*.
   (d) Sia $u = f(x)/g(x)$. Provare che $F/K(u)$ è un'estensione finita di grado $\max(\deg f, \deg g)$
   (e) Dimostrare che $B := Aut(F) = Aut_K(F) = \{\mu_m : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}\}$ ove $m = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in GL_2(K)$.
   (f) Dimostrare che $\pi : GL_2(K) \to B$ è un epimorfismo di nucleo $\ker \pi = K^* I_2$, matrici scalari su K^*.
   (g) Provare che $Z(GL_2(K)) = K^* I_2$ (quindi B è isomorfo al gruppo proiettivo generale lineare $PGL_2(K) = GL_2(K)/K^*$).

(2) Sia $K = \mathbb{F}_3$, $R = K[x]$, $F = K(x)$ e $B = Aut(F) \simeq PGL_2(K)$.
   (a) Determinare $|B|$.
   (b) Sia H un 3-sottogruppo di Sylow di B. Trovare $L = F^H$, il sottocampo di F fissato (puntualmente) da H.
   (c) Mostrare che $H = Aut_L(F)$.
   (d) Trovare $u \in F$ tale che $L = K(u)$.

(3) Mostrare che $i\sqrt{3}$ e $1+i\sqrt{3}$ sono radici di $f(x) = x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 6x + 12$ in $\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$. Sia $K = \mathbb{Q}(a_1, \dots, a_4)$ il campo generato dalle radici di f. Esiste un automorfismo σ di K tale che $\sigma(i\sqrt{3}) = 1 + i\sqrt{3}$?

E-mail address: `andrea.previtali@uninsubria.it`

Webpage: `http://scienze-como.uninsubria.it/previtali`