

ESERCIZI TEORIA DI GALOIS FOGLIO 4

- (1) Si ricorda che un poset (partially ordered set) (P, \preceq) è un insieme dotato di un ordine parziale, ossia una relazione riflessiva, antisimmetrica e transitiva. Siano (S, \preceq_S) e (T, \preceq_T) due poset e f, g funzioni tali che

- (a) $f : S \rightarrow T, g : T \rightarrow S$.
- (b) Se $s_1 \preceq_S s_2$ e $t_1 \preceq_T t_2$, allora $f(s_2) \preceq_T f(s_1)$ e $g(t_2) \preceq_S g(t_1)$.
- (c) $s \preceq_S g(f(s))$ e $t \preceq_T f(g(t))$ per ogni $s \in S$ e $t \in T$.

Provare che $gf g(t) = g(t)$ e $f g f(s) = f(s)$ e dedurre che la corrispondenza di Galois realizza un antiisomorfismo (biezione che inverte l'ordine) tra $\mathcal{F}_0 = \{F^H\}$ e $\mathcal{G}_0 = \{Aut_L(F)\}$ ove F/K è un'estensione di campi, $H \leq Aut_K(F)$ e $K \leq L \leq F$.

- (2) Sia X un insieme. $\kappa : 2^X \rightarrow 2^X$ dicesi un operatore di chiusura (secondo Kuratowski) se

- $a \subseteq \kappa(a)$.
- $\kappa^2(a) = \kappa(a)$.
- $\kappa(a \cup b) = \kappa(a) \cup \kappa(b)$.
- $\kappa(\emptyset) = \emptyset$.

Provare che

- (a) $a \subseteq b$ implica $\kappa(a) \subseteq \kappa(b)$.
- (b) $\kappa(\bigcup_{i=1}^n a_i) = \bigcup_{i=1}^n \kappa(a_i)$.
- (c) $\kappa(\bigcap_I a_i) = \bigcap_I \kappa(a_i)$.
- (d) Dedurre che $\mathcal{C} = \{a \in 2^X : \kappa(a) = a\}$ definisce una topologia τ su X i cui chiusi sono gli elementi di \mathcal{C} .
- (e) Costruire gli operatori di Kuratowski per gli insiemi $\mathcal{F} = \{K \leq L \leq F\}$ e $\mathcal{G} = \{H \leq Aut_K(F)\}$ i cui insiemi chiusi sono \mathcal{F}_0 e \mathcal{G}_0 .

- (3) Sia $K = \mathbb{Q}$ e $F = K(\alpha)$, ove $\alpha^3 = 2$.

- (a) Dimostrare che $\mu_\beta : F \rightarrow F$ definita da $\mu_\beta(\gamma) = \gamma\beta$ definisce una mappa K -lineare.
- (b) Sia M l'applicazione che associa ad ogni β la matrice corrispondente a μ_β rispetto alla base $1, \alpha, \alpha^2$. Provare che M realizza un omomorfismo di anelli tra F e $(K)_3$, iniettivo e K -lineare.
- (c) Determinare M rispetto alla base $1, \alpha - \alpha^2, \alpha + \alpha^2$ e trovare relazione tra le due famiglie di matrici.

E-mail address: andrea.previtali@uninsubria.it

Webpage: <http://scienze-como.uninsubria.it/previtali>