

## ESERCIZI TEORIA DI GALOIS FOGLIO 5

- (1) Sia  $f(t) = \prod_{i=1}^n (1 + x_i t) = \sum_{j=0}^n e_j t^j$  la funzione generatrice degli  $e_j$ .
- (a) Provare che  $e_j = \sum_{|I|=j} x_I$ , ove  $I$  è un multiindice  $I = (a_1, \dots, a_j)$ ,  $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_j \leq n$  e  $x_I = \prod_{a \in I} x_a$ .
- (b) Calcolare la derivata del logaritmo di entrambe le espressioni.
- (c) Siano  $p_k = \sum_i x_i^k$ . Provare che

$$f(t) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k p_k t^k = \sum_j (j+1) e_{j+1} t^j.$$

- (d) Dedurre le formule di Newton

$$\sum_{j+k=\ell} (-1)^k e_j p_k = (\ell+1) e_{\ell+1}$$

ove  $e_j = 0$  se  $j < 0$  o  $j > n$ .

- (e) Trovare una dimostrazione più semplice di questa ricorrenza per  $\ell > n$ .
- (2) Si introduca sui monomi in  $A = K[x_1, \dots, x_n]$  un ordinamento lessicografico. Ossia  $x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n} \preceq x_1^{b_1} \dots x_n^{b_n}$  sse  $(a_1, \dots, a_n) \leq_{\text{lex}} (b_1, \dots, b_n)$  e lo si estenda a tutto  $A$  confrontando i massimi monomi di due polinomi. Per brevità denotiamo  $x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$  con  $x^a$ ,  $a = (a_1, \dots, a_n)$ .
- (a) Mostrare che  $\preceq$  induce un ordinamento totale su  $A$ .
- (b) Sia  $f$  un polinomio simmetrico e  $x^a$  un suo monomio. Provare che anche  $x^{a^>}$  è un monomio di  $f$  dove  $a^>$  è la lista ottenuta da  $a$  riordinando i suoi elementi in ordine decrescente.
- (c) Sia  $b = a^>$ . Mostrare che  $f - k e_1^{b_1-b_2} e_2^{b_2-b_3} \dots e_n^{b_n}$ ,  $k$  il coefficiente del monomio massimo di  $f$ , ha monomio massimo inferiore a  $x^b$ .
- (d) Dedurre che  $f(x_1, \dots, x_n) = \hat{f}(e_1, \dots, e_n)$  per un opportuno polinomio  $\hat{f}$ .
- (e) Applicare l'algoritmo precedente al polinomio simmetrico in due variabili  $x_1^3 + x_2^3 - x_1 x_2$ .
- (3) Sia  $f \in K[x]$  irriducibile di grado  $n$ ,  $|F : K| = m \perp n_i$ . Provare che  $f$  è irriducibile su  $F$ .
- (4) Trovare il grado del campo di spezzamento per  $x^6 + 1$  su  $\mathbb{Q}$  e su  $\mathbb{F}_2$ .

*E-mail address:* [andrea.previtali@uninsubria.it](mailto:andrea.previtali@uninsubria.it)

*Webpage:* <http://scienze-como.uninsubria.it/previtali>