

ESERCIZI TEORIA DI GALOIS FOGLIO 9

- (1) Sia $R = K[x]$ l'anello dei polinomi in una variabile sul campo K e sia μ la mappa di moltiplicazione da $R \times R$ in R definita da $\mu(f, g) = fg$.

- (a) Provare che la regola di Leibnitz si può descrivere mediante la seguente identità:

$$D\mu = \mu((D, id) + (id, D)),$$

ove $(D, id)(f, g) = (Df, g)$;

- (b) Dedurre che $D^n \mu = \mu((D, id) + (id, D))^n$;

- (c) Dimostrare senza usare induzione la regola di Leibnitz per derivate iterate di un prodotto

- (2) Sia \mathbb{R} il campo reale e sia $f \in \mathbb{R}[x]$ di grado $d = 2^n m$, m dispari, $n > 0$, E un campo di spezzamento per f e a_1, \dots, a_d le sue radici, $b_{ij} = a_i + a_j + ca_i a_j$, $c \in \mathbb{R}$.

- (a) Mostrare che $g(x) = \prod_{1 \leq i < j \leq d} (x - b_{ij})$ ha grado $2^{n-1} m(d+1)$;

- (b) Provare che $m(d+1)$ è dispari;

- (c) Mostrare che $g(x) \in \mathbb{R}[x]$;

- (d) Mostrare per induzione su n che $g(x)$ ammette una radice $z(c) \in \mathbb{C}$;

- (e) Dedurre che $z(c) = b_{i(c)j(c)}$;

- (f) Siccome \mathbb{R} è infinito, dedurre che $x_{i(c)}, x_{j(c)}$ hanno prodotto e somma in \mathbb{C} ;

- (g) Usando il fatto che \mathbb{C} non ammette estensioni quadratiche proprie dedurre che $a_i \in \mathbb{C}$, ossia \mathbb{C} è algebricamente chiuso.

E-mail address: andrea.previtali@uninsubria.it

Webpage: <http://scienze-como.uninsubria.it/previtali>

Date: May 18, 2009.

©Andrea Previtali.