

**Geometria Elementare:
tutto quello che volevate sapere ma non
avete mai osato chiedere**

Andrea Previtali

Menaggio, 16 Maggio 2003

Protagonisti

La Geometria Elementare si occupa di stabilire relazioni tra tre tipi di oggetti:

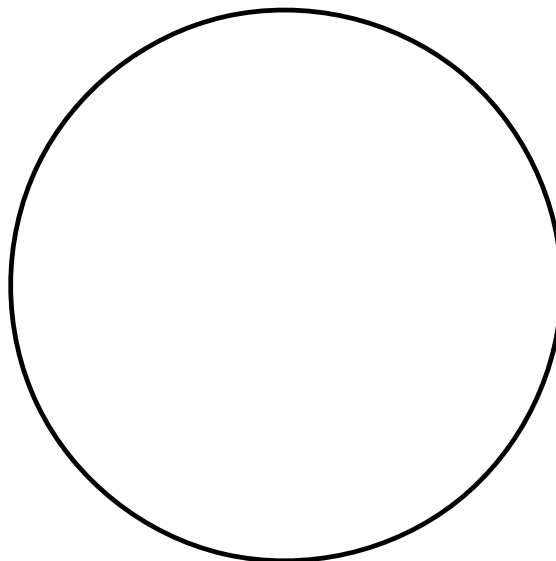
- Punti



- Rette



- Circonferenze



Elementare Mister Watson!

Qualcosa viene dato per scontato ed evidente

Assiomi o Postulati

Euclide (325-256 a.c.) ne propone 5

1. (la retta è infinita) un segmento è illimitatamente prolungabile;
2. dati due punti esiste una ed una SOLA retta che li congiunge;
3. esiste una ed una SOLA circonferenza con centro e raggio assegnati;
4. se due rette si incontrano formando un angolo retto, anche gli altri tre angoli sono retti;
5. (Assioma delle parallele) esiste una ed una SOLA retta parallela ad una retta data e passante per un punto dato.

Geometrie non-euclidee

Riemann (1826-1866) descrive una geometria con rette di lunghezza finita, tale geometria viene detta **Ellittica**.

Lobachevskij (1793-1856) mostra che si può negare l'assioma delle parallele senza incorrere in contraddizione, la sua geometria viene detta **Iperbolica**.

Se il mondo fosse iperbolico ci sarebbero:

- rette che si avvicinano senza mai incontrarsi;
- triangoli la cui somma degli angoli interni è minore di 180 gradi;
- circonferenze la cui lunghezza non uguaglia il diametro per π .

Teoremi

Supponiamo che le nostre regole di partenza siano gli assiomi di Euclide. Tutte le conseguenze logiche di questi assiomi vengono detti **Teoremi** della Geometria Euclidea. Alcuni esempi noti a Euclide:

Teorema 1. (*Baricentro*) Le *mediane* di un triangolo si incontrano in un solo punto.

Teorema 2. (*Ortocentro*) Le *altezze* di un triangolo si incontrano in un solo punto.

Teorema 3. (*Circocentro*) Gli *assi* dei tre lati di un triangolo si incontrano in un solo punto.

Teoremi meno noti

Eulero (1707-1783) il più prolifico matematico mai esistito (oltre 22 volumi di teoremi da lui scoperti) si accorse che

Teorema 4 (Eulero). *Il baricentro, l'ortocentro e il circocentro di un triangolo sono allineati. La retta su cui giacciono viene detta di Eulero.*

A Napoleone (1769-1821), il grande condottiero francese, viene attribuito il seguente

Teorema 5 (Napoleone). *Il triangolo avente come vertici i (circo)centri dei tre triangoli equilateri costruiti sui lati di un triangolo è equilatero.*

Al matematico americano Morley (1860-1937) si deve infine

Teorema 6 (Morley). *Il triangolo avente come vertici i punti di intersezione delle **trisettrici interne** di un triangolo è equilatero.*

Paghi uno e prendi due

Voglio infine accennare ad un metodo che consente di ottenere da un teorema noto un nuovo teorema. Tale metodo è dovuto al geometra francese Poncelet (1788-1867) ed è meglio noto col nome di **Principio di Dualità**.

Come esempi fornisco due teoremi dovuti a Pascal (1623-1662) e a Brianchon (1783-1864).

Teorema 7 (Pascal). *I punti di intersezione dei lati opposti di un esagono inscritto in una circonferenza sono congiunti da una retta.*

Teorema 8 (Brianchon). *Le rette congiungenti i vertici opposti di un esagono circoscritto ad una circonferenza si incontrano in un punto.*

Nonostante i due asserti siano stati scoperti a duecento anni di distanza e sembrano graficamente molto diversi, uno è ottenibile dall'altro usando il seguente

Glossario

- punto \Leftrightarrow retta;
- intersezione \Leftrightarrow congiungente;
- inscritto \Leftrightarrow circoscritto.