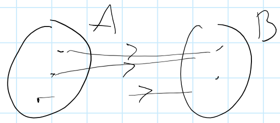
numeri

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=x^2$ $\quad g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

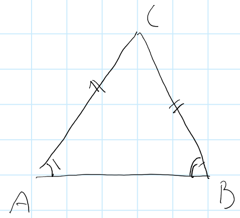


$g(x)=x+1$

$$\mathbb{R}\xrightarrow{f}\mathbb{R}\xrightarrow{g}\mathbb{R}$$

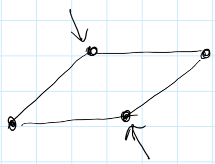
$$x \longmapsto x^2 \longmapsto x^2+1 = g(f(x))$$

COMPOSIZIONE $\quad g\circ f$

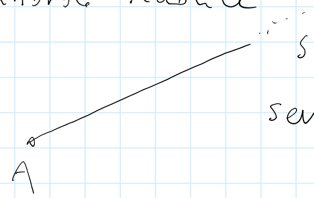


$|AC| = |CB|$

$\hat{A} = \hat{B}$

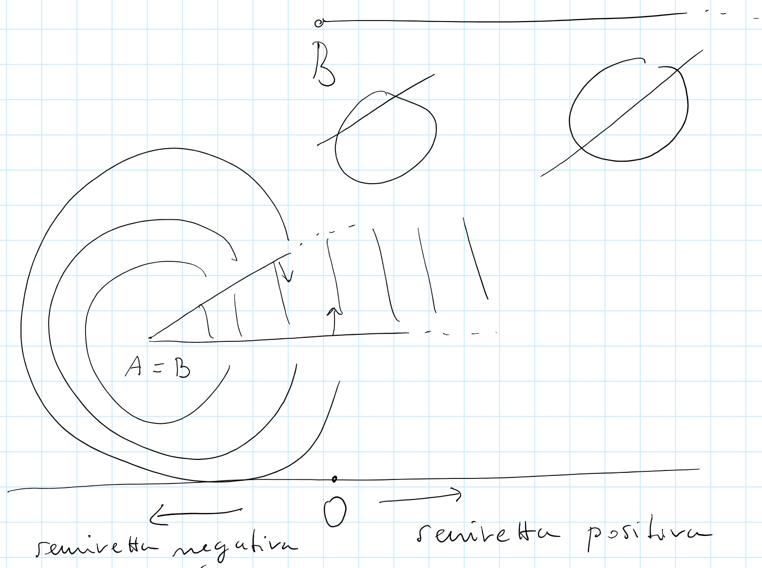


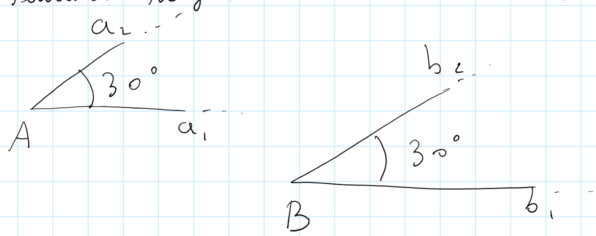
Lucio Lombardo Radice



semiretta

semi = metà





Ampiezza di un angolo = classe di equivalenza di angoli

Dimostrare che angolo A stessa ampiezza se

$A \to B \quad a_1 \to b_1 \implies a_2 \to b_2$

Relazione di equivalenza su insieme A

R relazione su A $\quad R \subseteq \underbrace{A \times A}_{\text{prodotto cartesiano}} = \{(a,b) : a, b \in A\}$

$A = \{1, 2\} \quad A \times A = \{(a,b) : a, b \in A\} = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$

$R \subseteq (A, A) \quad R = \{(1,1), (2,2)\}$

1) Riflessiva $\forall a \in A \quad (a,a) \in R \quad aRa$

$\forall$ ↓ per ogni

2) Simmetrica $\forall a, b \in A$ Se $(a,b) \in R$ aRb

allora $(b,a) \in R$ bRa

$(a,b) \in R$ è equivalente a scrivere aRb

a sta nella relazione R con b

ossia R è chiuso rispetto allo scambio

tra le componenti

$$(a,b) \xrightarrow{s} (b,a)$$

$$\boxed{\text{Se } (a,b) \in R \implies s((a,b)) \in R}$$

Ex1: Dimostrare che R è simmetrica se e solo se

R è chiuso rispetto ad s

3) TRANSITIVA Dati $a, b, c \in A$

Se $\underbrace{aRb \text{ e } bRc}_{\text{IPOTESI}} \implies aRc$

Ex2: Dimostrare che $R = \{(1,1), (2,2)\}$ è riflessiva

simmetrica e transitiva

$R = \{(1,2), (2,2)\}$ è una relazione

NON SIMMETRICA

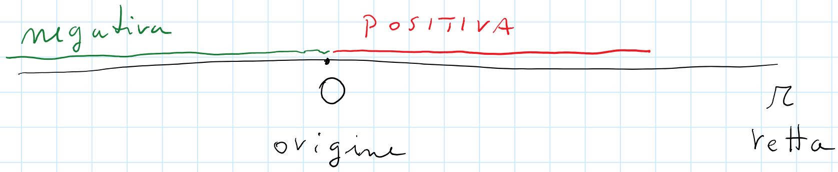
infatti R non è chiuso rispetto allo scambio

$s(R) = \{s(r) : r \in R\} = \{(2,1), (2,2)\} \neq R$

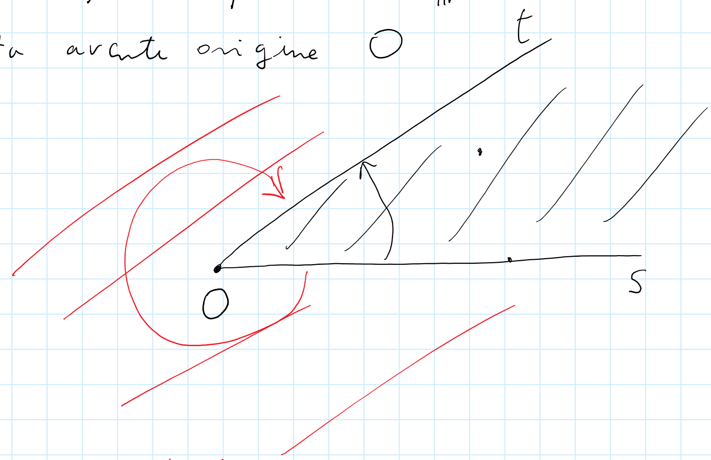
$(2,1) \notin R$

Non si fornisce alcuna definizione per il concetto di RETTA (Euclide concetto primitivo)

Def Semiretta con origine punto O e supporto retta r è la parte di retta r che si ottiene $O \in r$, origine, spostandosi a destra o a sinistra



Def Un ANGOLO è la porzione di piano ottenuta spostando una semiretta s avente origine O fino a farla sovrapporre a un'altra semiretta avente origine O

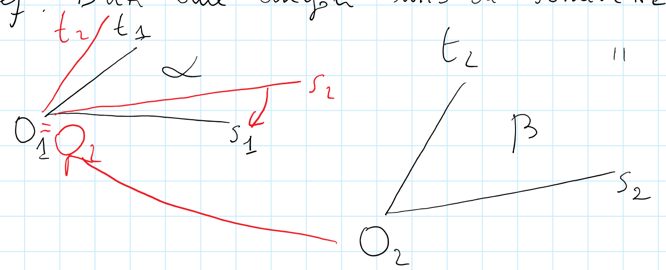


angolo rosso si dice CONCAVO ORARIO

" nero " " CONVESSO ANTIORARIO

si ottiene spostando s in senso antiorario verso t
t " " orario " s

Def: Dati due angoli α, β uno di semirette s_1 e t_1
" s_2 e t_2



dico che α ha la stessa AMPIEZZA di β se spostando s_2 su s_1 O_2 su O_1 anche t_2 si sposta su t_1

Scrivo $\alpha \, E \, \beta$, notate che E definisce una relazione tra gli angoli

E è di equivalenza

Forma alternativa per descrivere E è dire che

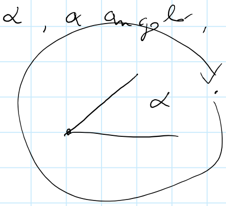
$\alpha \, E \, \beta \iff$ esiste uno spostamento (rigido) dei punti del piano che porta β in α

Se chiamo s lo spostamento (traslazione + rotazione)

$$s(\beta) = \alpha$$

1) Riflessiva $\forall \alpha$, α angolo, esiste uno spostamento s

$s(\alpha) = \alpha$



identico

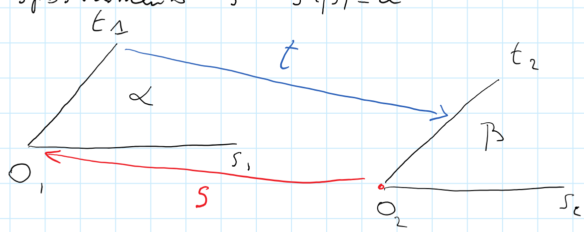
$id : P \mapsto P$

id è anche una qualsiasi rotazione di CENTRO arbitrario e angolo di ampiezza $0°$, $360°$, $(360 \cdot k)°$ $k \in \mathbb{Z}$

- k positivo senso antiorario
- k negativo " orario

2) Simmetrica $\forall \alpha, \beta$ angoli Se $\alpha E \beta \Rightarrow \beta E \alpha$

esiste spostamento s $s(\beta) = \alpha$



P punto del piano

$$P \xmapsto{s} s(P) \xmapsto{t} P$$

$$(t \circ s)(P) = id(P)$$

$$t \circ s = id \qquad t \cdot s = 1$$

Pensate a id come se fosse 1

" " $\circ$ " " " prodotto

" " t, s come " " numeri

$$t = s^{-1}$$

t viene detta la funzione INVERSA di s

(Attenzione non tutte le funzioni ammettono inversa)

$$t(\alpha) = \beta$$

3) TRANSITIVITÀ α, β, γ $\alpha E \beta$ e $\beta E \gamma \Rightarrow \alpha E \gamma$

esistono spostamenti s e t $s(\alpha) = \beta$, $t(\beta) = \gamma$

$\gamma = t(\beta) = t(s(\alpha)) = (t \circ s)(\alpha)$

E è relazione di equivalenza sse l'insieme degli spostamenti S

1) $id \in S$ 2) Se $s \in S \Rightarrow s^{-1} \in S$ 3) Se $t, s \in S \Rightarrow t \circ s \in S$

07/03: In generale se ho un insieme di oggetti A, introduco una relazione di equivalenza E

$$a E b \iff \exists s \in S \quad s(a) = b$$

dove S è un sottoinsieme delle funzioni $A \to A$ che soddisfa le condizioni 1) e 2) e 3)

Def: Un insieme S che soddisfa le condizioni 1) 2) 3) viene detto GRUPPO

Esempio: $A = \mathbb{R}$ (numeri reali $\equiv$ misure con segno)

$f(x) = -x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione

$S = \{f\}$ 1) $id \in S$? $id = f$? $id(x) = x$

Def f, g funzioni su A sono uguali sse $f(x) = g(x)$ $\forall x \in A$

Per mostrare che $f \neq id$ ossia $\exists x \in \mathbb{R}$ $f(x) \neq id(x)$

$$f(x) = -x \neq x = id(x)$$

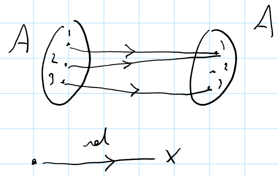
Se $x = 1$ $(x \neq 0)$

Quindi S non è un gruppo

Provo ad aggiungere id ad S

$S = \{id, f\}$ 1) $id \in S$

2) Se $s \in S \Rightarrow$ esiste s^{-1} e $s^{-1} \in S$



$s = id$ $\quad \underset{\mathbb{R}}{x} \xrightarrow{id} \underset{\mathbb{R}}{x}$ $\quad id^{-1}$? $id^{-1} = id \in S$

$s = f$ $\quad f(x) = -x$ $\quad x \longmapsto -x = y$

f^{-1} è la funzione che a partire da y mi fornisce x

$y = -x \qquad x?$ $\qquad 3 = -x \qquad x = -3$

$\uparrow$ DATO $\quad \downarrow$ INCOGNITA

$y = -x \qquad x = -y$

$f^{-1}(y) = -y \qquad f^{-1} = f \in S$

S soddisfa 2)

3) $\forall\, t, s \in S \quad t \circ s \in S$

$id \circ id = id$
$id \circ f = f$
$f \circ id = f \leftarrow$ Esercizio
$f \circ f =$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "s"] \arrow[rr, bend right, "t \circ s"'] & s(x) \arrow[r, mapsto, "t"] & t(s(x)) = (t \circ s)(x) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[rr, bend right, "id \circ f"'] & -x \arrow[r, mapsto, "id"] & -x \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[rr, bend right, "id"'] & -x \arrow[r, mapsto, "f"] & -(-x) = x \end{tikzcd}$$

Teorema: In generale id, f

$id \circ f = f \circ id = f \qquad$ (analogo $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$)

	id	1
funzione	f	x numero
Composizione	$\circ$	$\cdot$ prodotto $(\times)$
$id \circ f = f \circ id = f$		$1 \cdot x = x \cdot 1 = x$
$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$		$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1 \qquad x \neq 0$
$f \circ g \neq g \circ f$		$x \cdot y = y \cdot x$

($0^{-1} \cdot 0 = 1 \neq 0$ Assurdo assumendo $\exists\, 0^{-1}$)

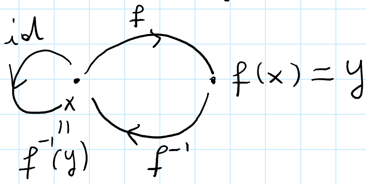
f sia invertibile

f non sia non invertibile

Se esiste f^{-1}

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "f"] & f(x) \arrow[r, mapsto, "f^{-1}"] & x \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "f^{-1}"] \arrow[rr, bend right, "id"'] & f^{-1}(x) \arrow[r, mapsto, "f"] & x \end{tikzcd}$$



$f(x) = y \qquad f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y)$

$x = id(x) = f^{-1}(y)$

Tornando all'esempio $S = \{id, f\}$ $f(x) = -x$

S soddisfa 1), 2) e 3) quindi è un gruppo

Come si esprime la relazione di equivalenza ottenuta da S?

$A = \mathbb{R}$ $\quad 1 \, E \, b \quad b?$ $\quad S = \{id, f\}$

$id(1) = 1, \; f(1) = -1 \quad b \in \{-1, 1\}$

$\sqrt{2} \, E \, b \quad b \in \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

Esempio 2: $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\quad f(x) = -x$ OPPOSTO di x

Osservate che f è una funzione da A in A

$g(x) = \frac{1}{x}$ INVERSO di x $\quad g: A \to A$

$S = \{g, f\}$ $\qquad g = id$? SI? / NO?

$\exists a \in A \quad g(a) \neq id(a) \quad \frac{1}{2} \neq 2$

Determinare quali a sono falsi positivi

$$g(a) = id(a)$$

$$\frac{1}{a} = a \qquad 1 = a^2 \qquad a \frac{1}{a} = a \cdot a$$

$$a^2 - 1 = 0 \qquad -1 + 1 = -1 + a^2$$

$(a-1)(a+1) = 0$ $\quad a - 1 = 0 \quad a = 1$ / $a + 1 = 0 \quad a = -1$

Sostituire S con $\{id, g, f\}$

$id^{-1} = id$, $\; f^{-1} = f$, $\; g^{-1}$? $\quad g(x) = \frac{1}{x} = y$

Trovare x formula y $\quad 1 = xy \quad x = \frac{1}{y}$

$g^{-1}(y) = \frac{1}{y}$ quindi $g^{-1} = g$

S soddisfa 2 si dice anche che è CHIUSO rispetto alla INVERSIONE $\quad s \longmapsto s^{-1}$

$\forall t, s \in S \quad t \circ s \in S$ a priori ho $9 = 3^2$ controlli

ma se $t \circ s = id$ sicuramente rimango in S

$$t \circ id = t \qquad id \circ s = s$$

Passo a 4 controlli: $\quad f \circ f = f^{-1} \circ f = id \in S$

$f \circ g$

$g \circ g = g^{-1} \circ g = id \in S$

$g \circ f$

$x \xmapsto{g} \frac{1}{x} \xrightarrow{f} -\frac{1}{x}$ $\quad -\frac{1}{a} = a \quad a^2+1=0$

ogni a NON è fatto positivo $\quad a=1 \quad -\frac{1}{1} \neq 1$

Esercizio: provare che $f \circ g \neq f, g$

$x \xmapsto{f} -x \xrightarrow{g} \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$ $\quad f \circ g = g \circ f$

Aggiungo anche $f \circ g = g \circ f$ a S

$$S = \{id, f, g, f \circ g\}$$

Esercizio: mostrare che S è un gruppo

$f(x) = x+1 \qquad g(x) = x^2$

$x \xmapsto{f} x+1 \xmapsto{g} (x+1)^2$

$x \xmapsto{g} x^2 \xmapsto{f} x^2+1$

$(a+1)^2 = a^2+1$

$a^2+2a+1 = a^2+1$

$2a = 0$

$a = 0$ è l'unico fatto positivo

quindi $f \circ g \neq g \circ f$

$A = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad f(x) = -x \quad g(x) = \frac{1}{x}$

$S = \{id, f, g, f \circ g\}$ soddisfa 1) $id \in S$

2) $(f \circ g)^{-1}$ $\quad x \xmapsto{g} \frac{1}{x} \xmapsto{f} -\frac{1}{x} = y$

$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1} = g \circ f = f \circ g$

3) $\forall\, t, s \in S \quad t \circ s \in S$

$g \circ (f \circ g) = g \circ f \circ g = f \circ g \circ g = f \circ g^{-1} \circ g = f \circ id = f$

$(\ 2 \cdot 3 \cdot 2 = \ \cdots \ = \qquad)$

$g \circ g \circ f \circ g \circ f \circ f = g \circ g \circ g \circ f \circ f \circ f$

$= g^3 \circ f^3 = g \circ f = f \circ g \in S$

S è un gruppo

Esempio: $A = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \quad a(x) = \frac{1}{x} \quad b(x) = \frac{1}{1-x}$

Qual è il più piccolo gruppo S di funzioni invertibili

che contiene a e b

$id, \quad a = a^{-1} \quad b^{-1}? \quad y = \frac{1}{1-x} \quad y(1-x) = 1$

$id, \quad a = a^{-1} \qquad b^{-1} ? \qquad y = \frac{1}{1-x} \qquad y(1-x) = 1$

$y - xy = 1 \qquad y - 1 = xy \qquad x = \frac{y-1}{y} \qquad b^{-1}(y) = \frac{y-1}{y}$

$b^{-1}(x) = \frac{x-1}{x}$

$x \xmapsto{b} y = \frac{1}{1-x} \xmapsto{b} b(y) = \frac{1}{1-y} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{\frac{1-x-1}{1-x}}$

$= \frac{1}{\frac{-x}{1-x}} = \frac{1-x}{-x} = \frac{x-1}{x}$ (Ex: Mostrare che $b^2 = b \circ b \notin \{id, a, b\}$)

$z = \frac{x-1}{x}$

$b(z) = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-\frac{x-1}{x}} = \frac{1}{\frac{x-x+1}{x}} = x$

$b(b^2(x)) = x \qquad b^3(x) = id(x) \quad \forall x$

Ex $\Leftarrow\!\!\Rightarrow$ $b^3 = id$

$b^2 = b^{-1} \qquad b \circ b^2 = b \circ b^{-1} \qquad b^3 = id$

$\{id, \underset{\substack{\| \\ id}}{}\!\! a, b, b^2\}$ $\quad (b^2)^{-1} = (b \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ b^{-1} = b^2 \circ b^2$

$\quad id \quad a^{-1} \quad b^2 \quad b \qquad = b^4 = b \circ b^3 = b \circ id = b$

$b^8 = (b^3)^2 \circ b^2 = b^2$

$x \xmapsto{a} \frac{1}{x} \xmapsto{b} \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{x}{x-1}$

$x \xmapsto{b} \frac{1}{1-x} \xrightarrow{a} 1-x$

$x \xmapsto{b^2} \frac{x-1}{x} \xrightarrow{a} \frac{x}{x-1}$

$a^2 = id \qquad b^3 = id \qquad b \circ a = a \circ b^2$

$\{id, a, b, b^2, b \circ a, b^2 \circ a\}$

$(b \circ a)^{-1} = a^{-1} \circ b^{-1} = a \circ b^2 = b \circ a$

Ex: calcola $(b^2 \circ a)^{-1}$ $\qquad$ Ex: $a \circ b = b^2 \circ a$

$a \circ b \circ a \circ b \circ b \circ \cancel{a} \circ \cancel{a} =$

$a \circ b \circ \underbrace{a \circ b^2} = a \circ b \circ b \circ a$

$= a \circ b^2 \circ a = b \circ a \circ a = b$

$b^k \circ a^l \qquad k$ classe di resto modulo 3

$\qquad\qquad l$ " " " " 2

6 elementi

Gruppo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x)$ una sola variabile, o ISOMETRIA,

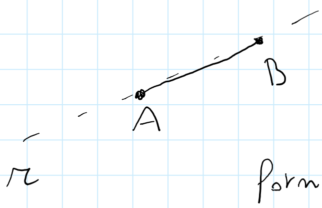
x $\qquad$ _ (B)

π = piano $\quad \pi \simeq \mathbb{R}^2 \quad P \longleftrightarrow (a,b) \quad a,b \in \mathbb{R}$

$f : \pi \to \pi \qquad \cdot P' = f(P)$

$\dot{P}$

Def Dati $A, B \in \pi$ $A \neq B$ chiamo SEGMENTO di estremi A e B la porzione di retta passante per A, B compresa tra A e B



Notate che $A \neq B$ fornisce un'unica retta r $A, B \in r$

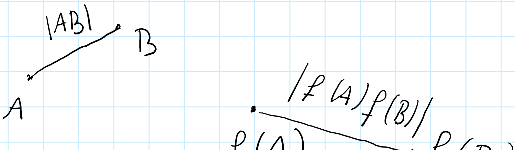
Si denota tale segmento AB

Def Si chiama DISTANZA tra i punti A e B la lunghezza di AB, la denoto $|AB|$ $\big(d(A,B) \big)$

Nel caso in cui $\underline{\underline{A = B}}$ $\quad AB = \{A\}$ e $|AB| = 0$

Def Sia $f : \pi \to \pi$ funzione, dico che f è uno SPOSTAMENTO (RIGIDO) o ISOMETRIA se f preserva le distanze, ossia presi due punti arbitrari del piano A, B

$f(A)$, $f(B)$



immagini di A e B

$$\boxed{|f(A)f(B)| = |AB|}$$

Teorema: Se f è una isometria del piano allora f è iniettiva

Dim: $f(B) = X = f(A)$

allora f è iniettiva

Dim: $f(B) = X = f(A)$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & X \\ B \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$0 = |f(A)\, f(B)| = |AB| \Rightarrow A = B$ C.V.D.

In generale si può esprimere l'INIETTIVITÀ di una funzione
$$f(A) = f(B) \Longrightarrow A = B$$
$$\cancel{f}(A) = \cancel{f}(B)$$

FATTO: Se f isometria, allora f è invertibile

Ex: Mostrare che f è biunivoca $\Leftrightarrow$ f è invertibile

$\Uparrow$

(f iniettiva + suriettiva)

difficile

Teorema: $S = \{ f : \pi \to \pi,\ f \text{ isometrie} \}$ è un gruppo

Dim: 1) $id \in S$ $\forall A, B \in \pi$

$$|AB| = |id(A)\ id(B)| \ ?\ \text{Si}$$
$$id(A) = A \quad id(B) = B$$

2) f isometria $f \in S \Longrightarrow$ esiste f^{-1} e $f^{-1} \in S$

$A, B \in \pi$ $\quad |AB| = |f^{-1}(A)\, f^{-1}(B)|$? Si

$X = f^{-1}(A)$ $\quad Y = f^{-1}(B)$ $\quad A = f(X)$, $B = f(Y)$

$$|f(X)\, f(Y)| \overset{?}{=} |XY| \quad \text{Si } f \text{ isometria}$$

3) $f, g \in S \Rightarrow f \circ g \in S$ $\quad A, B \in \pi$

$$|AB| \overset{?}{=} |(f \circ g)(A)\ (f \circ g)(B)|$$
$$\parallel \qquad\qquad \parallel$$
$$|g(A) g(B)| = |X\ Y| = |f(\underbrace{g(A)}_{X})\ f(\underbrace{g(B)}_{Y})|$$

C.V.D.

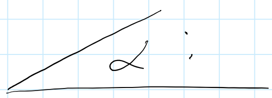
L'insieme delle isometrie S è un gruppo

Corollario: Dati due angoli α, β

$\alpha E \beta \Longleftrightarrow$ esiste una isometria s tale che $s(\alpha) = \beta$

S gruppo equivale E = relazione di equivalenza

Si dirà che α e β hanno la stessa ampiezza sse $\alpha \, E \, \beta$

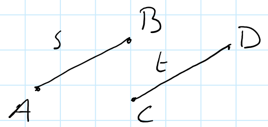


(Spunto di riflessione: Come si misura l'ampiezza di un angolo)

Cor 2: Dico che due segmenti sono CONGRUENTI se esiste una isometria che porta il primo nel secondo s, t segmenti $s \, E \, t \overset{def}{\iff}$ esiste una isometria f $\quad f(s) = t$

$$f(s) = \{ f(P) : P \in s \}$$

Allora E è di equivalenza



$s \neq t$ ma s è congruente a t

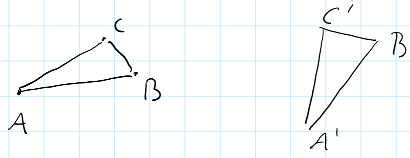
Oss: Se s è congruente a $t \Longrightarrow$

$s = AB \quad f(s) = t \quad f(s) = f(A)f(B)$

$|s| = |AB| = |f(A)f(B)| = |f(s)| = |t|$

(Stimolo di riflessione Vale il viceversa ossia se $|s| = |t|$ esiste una isometria f $\quad f(s) = t$?)

Def Un triangolo è l'insieme dato dall'unione dei 3 segmenti individuati da 3 punti (distinti)



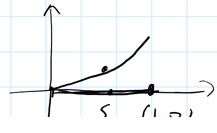
Def Dati due triangoli T_1 e T_2 dico che sono CONGRUENTI $\exists f$, f isometria, tale che

$$f(T_1) = T_2$$

Teorema: Sia s segmento, f isometria

$f(s)$ è sempre un segmento

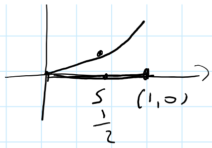
($g(x) = x^2$

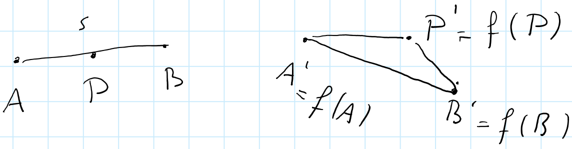


$(x, 0) \longmapsto (x, g(x))$

$0 \leq x \leq 1$)

$$g(x)=x^2 \qquad (x,0)\longmapsto (x,g(x)) \qquad 0\le x\le 1$$





$$|A'B'| = |AB| = |AP|+|PB| = |A'P'|+|P'B'| \Longrightarrow P'\in A'B'$$

Esempi: traslazioni, rotazioni e riflessioni (fisica) sono isometrie.

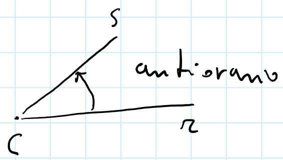
22.03.2016

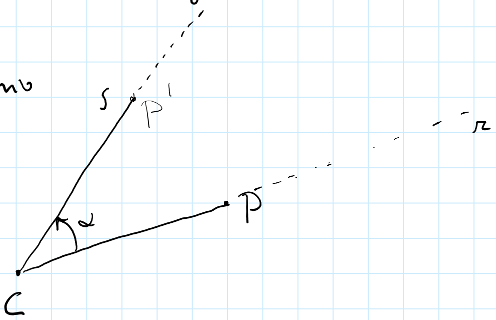
5 e 11 Aprile Io $\hookrightarrow$ Tuccoli

19 Aprile sospesa

Rotazione: Dati: 1 punto centro di rotazione C

ampiezza di un angolo (con segno) α





Esiste ed è unica la semiretta s che forma un'angolo di ampiezza α con la semiretta r passante da C e $P\,(\neq C)$ avente C come origine

P' il corrispondente di P è l'unico punto su S che soddisfa $|CP'|=|CP|$

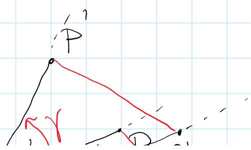
Se $P=C$ allora $P':=C$

Notate che la richiesta sopra diventa $C'=C$

$$|C'P'|=|CP|$$

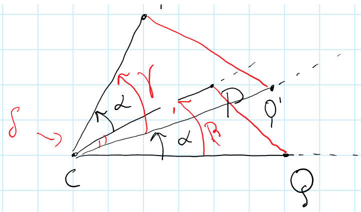
Uno dei controlli che devono essere verificati per la coppia di punti C e P

Questa trasformazione è una ISOMETRIA?



$|CQ'|=|CQ|$

Notate che



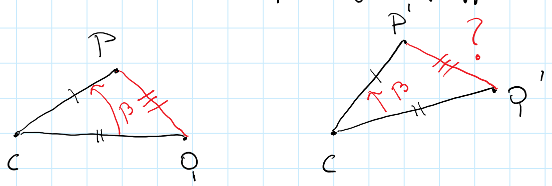
Notate che

$\gamma = \beta$

Infatti $\beta = \alpha + \delta$

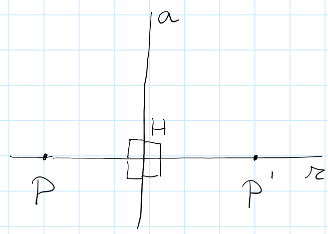
$\gamma = ?$

Per dimostrare che ho una isometria devo provare che $|PQ| = |P'Q'|$ per ogni coppia di punti P e Q



Per dedurre che $|CQ| = |CQ'|$, $|CP| = |CP'|$ e $\widehat{QCP} = \widehat{Q'CP'}$ che $|PQ| = |P'Q'|$ (criterio di congruenza tra triangoli).

RIFLESSIONE: Dati: retta a



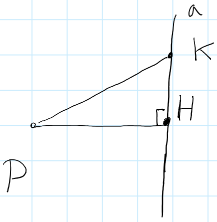
a viene detto l'ASSE della riflessione

Esiste una unica retta r i) $P \in r$

ii) $r \perp a$ perpendicolare

P' è l'unico punto di r i) "sta dall'altra parte di P rispetto ad a"

ii) $|P'H| = |PH|$



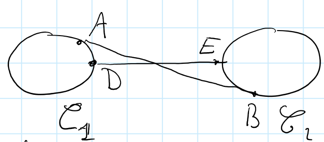
Ex) $|PK| \geq |PH|$ per ogni $K \in a$

(segue dal Teorema di Pitagora)

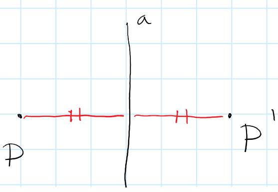
$|PK|^2 = |PH|^2 + |KH|^2$

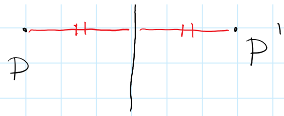
H è l'unico punto di a che rende minima la distanza $|PK|$ al variare di $K \in a$

<u>Def</u> Si chiama distanza tra P ed a esattamente $|PH|$, dove $PH \perp a$, $H \in a$



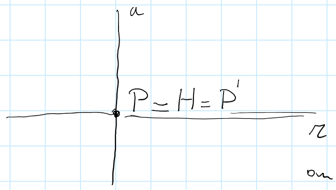
distanza tra $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ è $|DE| \leq |AB|$ $A \in \mathcal{C}_1$, $B \in \mathcal{C}_2$





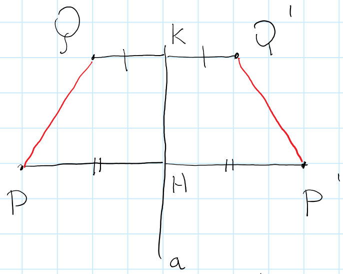
P', il riflesso di P rispetto ad a, è l'unico punto

i) $PP' \perp a$ ii) distanza di P' da a = distanza di P da a



Esiste ed è unica anche se $P \in a$

i) $P \in r$ ii) $r \perp a$



Provare che da $|PH| = |P'H|$, $|QK| = |Q'K|$ ....

(costruire due triangoli rettangoli e confrontarli)

per dedurre $|P'Q'| = |PQ|$

Def Si chiama vettore APPLICATO di estremo iniziale A e estremo finale B il segmento AB $(= BA)$ con indicato quale è il punto iniziale (e quindi il punto finale)

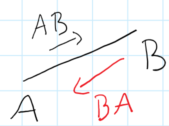
$\overrightarrow{AB}$

Quindi un vettore applicato è un segmento con segno

Quanti sono i vettori applicati con estremi A e B $(A \neq B)$

$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA} = \overleftarrow{AB}$

Se attribuisco segno positivo ad $\overrightarrow{AB}$ allora che $\overrightarrow{BA}$ ha segno negativo $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$



i versi di percorrenza del segmento AB sono 2 $\overrightarrow{AB}$ $\overleftarrow{AB}$

Def Date due rette r, s, si dice che s ha la stessa DIREZIONE di r se e solo se s è parallela ad r

ossia se i) $s \cap r = \emptyset$ insieme vuoto

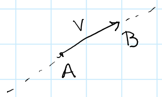
ii) $s = r$

Prop: Sia sEr la relazione di parallelismo

Allora E è di equivalenza

Il concetto di direzione cattura la proprietà che hanno in comune rette parallele

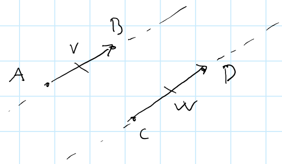
Def Dati due vettori v, w dico che sono equipollenti se i) le rette da v, w individuate sono parallele



ii) $|v| = |\overrightarrow{AB}| := |AB| =: |\overrightarrow{BA}|$

? NOTO

$|v| = |w|$?



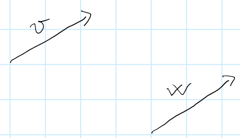
iii) v e w hanno lo stesso verso

23.03.2016 30 lezione

Ex: Equipollenza è una relazione di equivalenza

La classe di un vettore applicato viene chiamata

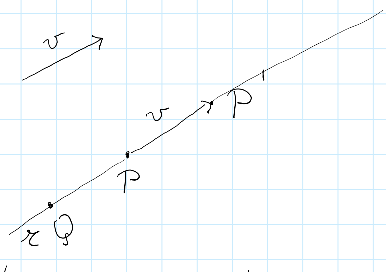
VETTORE



come vettori v e w sono la "stessa cosa"

$w = v$

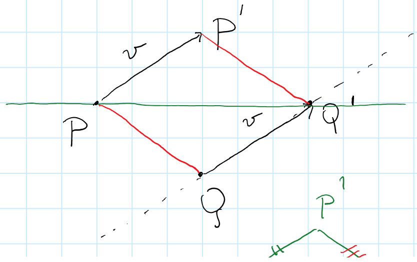
TRASLAZIONE: Dato vettore v (mi interessano solo la sua direzione, lunghezza, verso NON dove viene applicato)



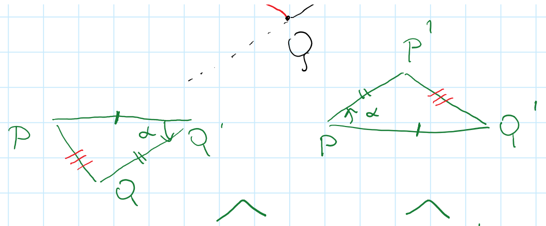
Osservate che esiste un'unica retta r parallela a v passante per P (Assioma delle parallele)

Domanda: quanti punti $Q \in r$ $|PQ| = |v|$

Ma solo $\overrightarrow{PP'}$ ha lo stesso verso di v



$|PQ| = |P'Q'|$

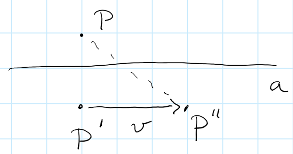


$$\widehat{QQ'P} = \widehat{Q'PP'}$$

$\Longrightarrow |PQ| = |P'Q'|$

Problema: Usando il fatto che le isometrie del piano costituiscono un gruppo, posso ottenere nuovi tipi di isometrie da quelle date?

Ex:

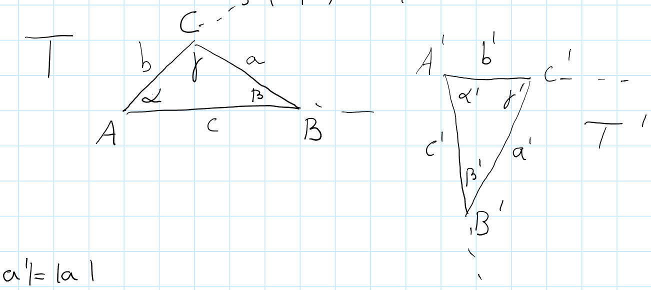


La trasformazione che manda P in P'' è un'isometria?

A quale tipo appartiene?

Def: Dati due triangoli T e T' si dicono CONGRUENTI se esiste una isometria s

$s(T) = T'$



$|a'| = |a|$
$|b'| = |b|$ Segue dal avere una isometria s $s(T) = T'$
$|c'| = |c|$

$s(a) = a'$

Ricordate che s isometria a segmento

$s(a) = \{ s(P) : P \in a \}$ è ANCORA un segmento

Nel nostro caso $s(a)$ DEVE essere uno dei lati di T'

(Perché?) Quale lato?

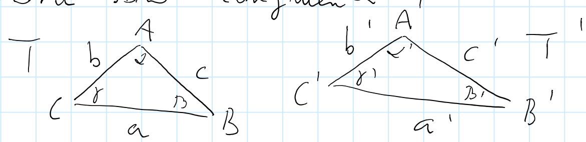
$\alpha' = \alpha$
$\beta' = \beta$
$\gamma' = \gamma$

Vale il viceversa? Se ho T, T' triangoli con $|a'| = |a|$ ... $\gamma' = \gamma$ posso dire che esiste s isometria $s(T) = T'$?

Sono alla ricerca di condizioni più deboli che assicurino la congruenza

CRITERI DI CONGRUENZA

LLL: Se T, T' sono due triangoli aventi ORDINATAMENTE lati di uguale lunghezza allora sono congruenti

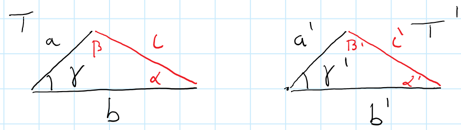


$|a|=|a'|$ $|b|=|b'|$ $|c|=|c'|$

Allora T e T' sono congruenti

Ne segue che $\alpha'=\alpha$ $\beta'=\beta$ $\gamma'=\gamma$

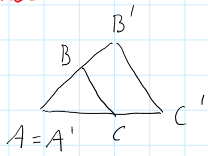
LAL:



$|a'|=|a|$
$|b'|=|b|$ $\Rightarrow$ T e T' sono congruenti
$\gamma'=\gamma$

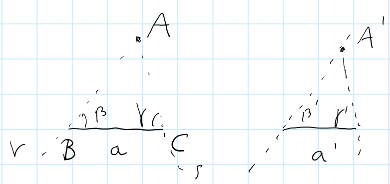
Ne segue $c=c'$ $\alpha'=\alpha$ $\beta'=\beta$

AAA



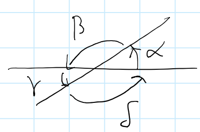
$BC \,//\, B'C'$

ALA LLA ALL AAL LAA



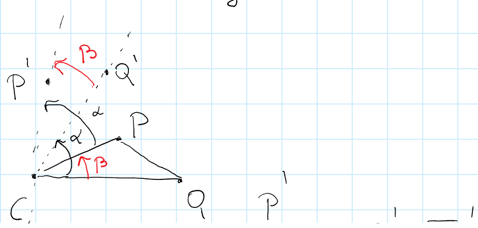
Quindi A è la (unica) intersezione tra le rette r e s dove $B\in r$ $\widehat{ar}=\beta$ e $C\in s$ $\widehat{sa}=\gamma$

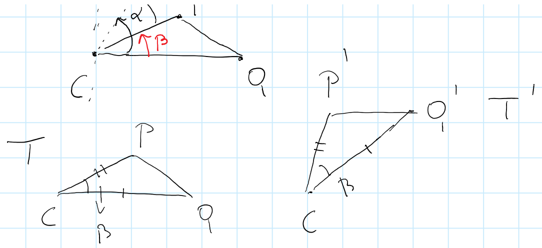
Ex: In quali casi A non esiste? β e γ come sono legati?



$\alpha=\gamma$
$\beta=\delta$
$\alpha+\beta=180°$

Rotazioni:





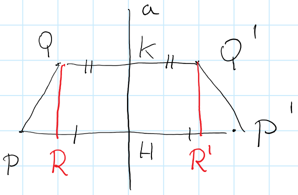
LAL implica che T e T' sono CONGRUENTI

$|PQ| = |P'Q'|$ Siccome P, Q sono arbitrari

ho che la rotazione preserva le distanze

ossia isometria

RIFLESSIONI:

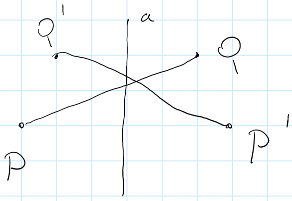


$|PR| = |R'P'|$ $\quad |PR| + |RH| = |PH| = |P'H| = \dots = |P'R'| + |R'H'|$

Sempre per LAL i triangoli PRQ e P'R'Q'

sono congruenti $|PQ| = |P'Q'|$

Ex:



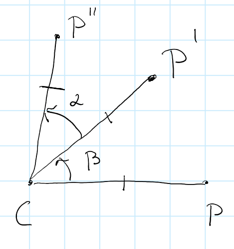
Ex: Dimostrare che le traslazioni sono isometrie.

Come si comportano le isometrie rispetto alla composizione

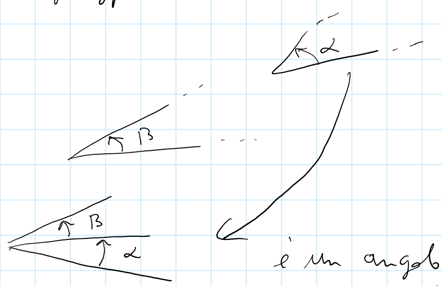
Rotazioni con lo stesso centro C

$\rho_{C,\alpha}$ = rotazione di centro C e angolo di ampiezza α (verso è specificato)

$$\rho_{C,\alpha} \circ \rho_{C,\beta} \overset{?}{=} \rho_{C,\alpha+\beta}$$



$\alpha+\beta$? È l'ampiezza dell'angolo che si ottiene



è un angolo la cui ampiezza chiamo $\alpha+\beta$

Ex $\quad \alpha+\beta=\beta+\alpha$

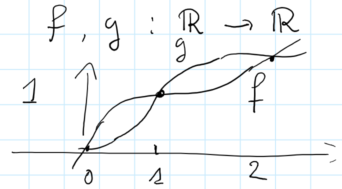
09.04.2016: Cor: Siano f, g isometrie tali che

$$f(X)=g(X) \quad \text{per } X\in\{A,B,C\}$$

A, B, C NON allineati. Allora $f=g$

Dim: $f, id \quad f(X)=id(X)=X \quad X\in\{A,B,C\} \Rightarrow f=id$

(Intermezzo $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad f(1)=g(1)=1$)



$f(X)=g(X) \quad g^{-1}$ isometria

$$g^{-1}\circ f(X)=X \qquad X\in\{A,B,C\}$$

$$A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} f(A)=g(A)$$

quindi $g^{-1}\circ f$ è una isometria che fissa i punti A, B, C

$$g^{-1}\circ f=id \qquad g\circ(g^{-1}\circ f)=g\circ id=g$$

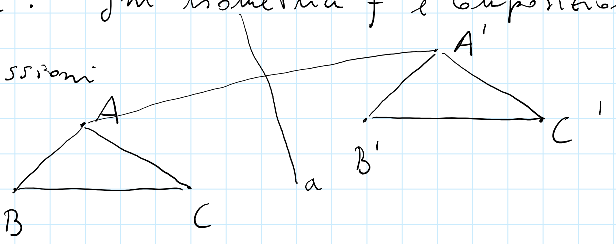
$$(g^{-1}\circ f\circ g=id\circ g\ ?) \qquad (g\circ g^{-1})\circ f=id\circ f=f$$

Analogo $\quad a^{-1}b=1 \quad a\,a^{-1}b=a\cdot 1 \quad b=a$

$$a^{-1}b\,a=1\cdot a$$

Teorema: Ogni isometria f è composizione di al più 3 riflessioni

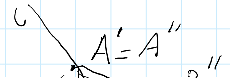
Dim:



$X'=f(X)$

Se $A\neq A'$, costruisco l'asse del segmento AA'

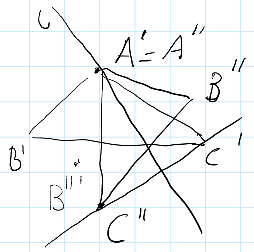
$\sigma_a(A)=A'$



dove $X''=\sigma_a(X)$

Se $A \neq A'$, costruisco l'asse del segmento AA'

$\sigma_a(A) = A'$ allora $X'' = \sigma_a(X)$

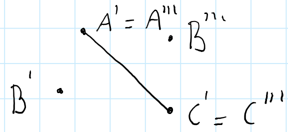


$\overset{|AC|}{|A''C''| \; = \quad = \; |A'C'|}$

Se $C' \neq C''$, costruisco asse c del segmento $C'C''$

Notate che $A' = A''$ $\quad |A'C''| = |A'C'|$

$\sigma_c(X'')$ $\quad \sigma_c(A'') = A''$ $\quad \sigma_c(C'') = C'$ $\quad \sigma_c(B'') = B'''$



$\sigma_c(X'') = X'''$

Dove si trova B'''? $\quad |A'B'| = |A'''B'''|$ ma $A''' = A'$

$|C'B'| = |C'''B'''|$ $\quad C''' = C'$

Quindi o $B''' = B'$ altrimenti B''' è il riflesso di B' rispetto a $A'C'$. In questo ultimo caso sia b la retta per A', C'

$\sigma_b(B''') = B'$ $\quad \sigma_b(A''') = A'$ $\quad \sigma_b(C''') = C'$

$$X \xrightarrow{\sigma_a} X'' \xrightarrow{\sigma_c} X''' \xrightarrow{\sigma_b} X' \qquad \text{per } X \in \{A, B, C\}$$

$$X \xrightarrow{\qquad f \qquad} X'$$

Quindi $\sigma_b \circ \sigma_c \circ \sigma_a (X) = f(X)$ $\quad X \in \{A, B, C\}$

Notate che $g = \sigma_b \circ \sigma_c \circ \sigma_a$ isometria $\quad g(X) = f(X)$

$\Longrightarrow f = g = \sigma_b \circ \sigma_c \circ \sigma_a$ $\quad$ Questo è il caso peggiore

Se, ad esempio, $A' = A$ $\quad f = \sigma_b \circ \sigma_c$

Caratterizzare isometrie contando quante riflessioni è necessario comporre per ottenerle

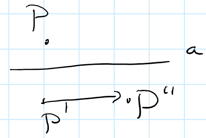
$f = \sigma_n \circ \dots \circ \sigma_1$

$n = 0$ equivale $X' = X$ $\quad X \in \{A, B, C\}$ $\quad f = id$

$n = 1$ $\quad f = \sigma_1$ riflessione

$n = 2$ $\quad f = \sigma_2 \circ \sigma_1$ $\begin{cases} \text{traslazione } \neq id & a_1 \parallel a_2 \quad a_1 \cap a_2 = \emptyset \\ \text{rotazione} & a_1 \cap a_2 = C \end{cases}$

$n = 3 \quad f = \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ glissoriflessione



$\{0, 2\} \quad \{1, 3\}$

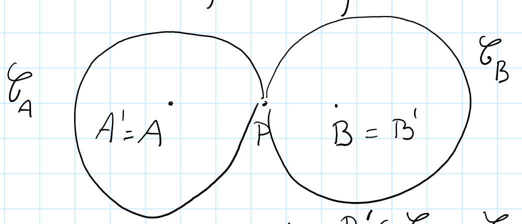
<u>Def</u> Sia f una isometria, P si dice un punto <u>fisso</u> di f

se $\quad f(P) = P$

$f = id$ tutti i punti del piano sono fissi (Ex: vale il viceversa)

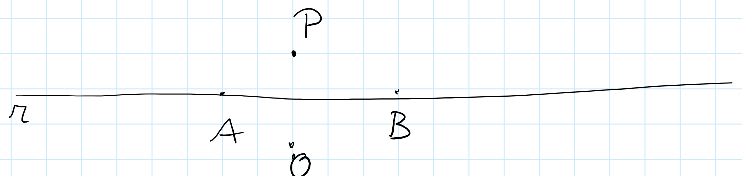
$f = \sigma$ riflessione ammette come punti fissi tutti e soli i punti del suo asse

In particolare come è fatta f avente almeno 2 punti fissi distinti



quindi $P' \in \mathcal{C}_A \cap \mathcal{C}_B = \{P\} \quad P' = P$

quindi ogni $P \in$ retta r per A, B sono fissi $f(P) = P$



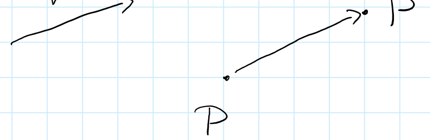
$P' \in \{P, Q\}$

Se $P' = Q \quad f(X) = \sigma_r(X) \quad X \in \{A, B, P\} \implies f = \sigma_r$

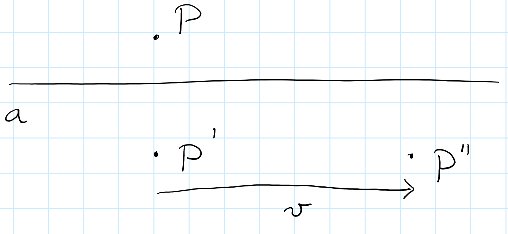
Se f fissa un solo punto C, allora f è una rotazione di centro C. Segue dal fatto che traslazioni $\neq id$, glissoriflessioni non hanno punti fissi.

Sia τ_v una traslazione, v vettore $\neq \underline{0}$,

$\exists P, \ \tau_v(P) = P$?



No



$v \neq \underline{0}$ glissoriflessioni

$$d(P, a) = d(P'', a)$$
$$\parallel \qquad\qquad \parallel$$
$$d(P', a)$$

Se $P = P''$ dovrebbe essere $d(P, a) = 0$ ossia $P \in a$

ma $P'' = \tau_v(P) \neq P$.

Prima modalità per distinguere isometrie contare il numero dei loro punti fissi

id tutti (almeno 3 punti non allineati)

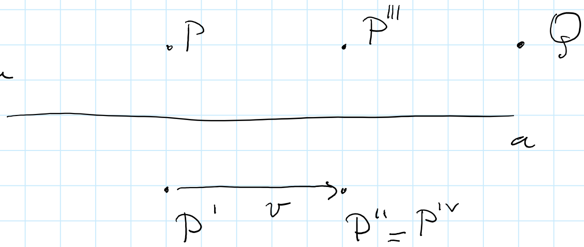
riflessioni almeno 2 punti, quindi tutta la retta, asse

rotazioni 1 solo centro

traslazioni

glissoriflessioni senza punti fissi

γ glissoriflessione



$\gamma = \tau_v \circ \sigma_a = \sigma_a \circ \tau_v$

$$\gamma \circ \gamma = \tau_v \circ \underbrace{\sigma_a \circ \tau_v} \circ \sigma_a = \tau_v \circ \underbrace{\tau_v \circ \sigma_a} \circ \sigma_a = \tau_v \circ \tau_v \circ id =$$

$$= \tau_{2v} \quad \left(\text{segue da } \tau_v \circ \tau_w = \tau_{v+w} \quad 2v = v + v\right)$$

Sia A un punto fisso per γ $\quad \gamma(A) = A$

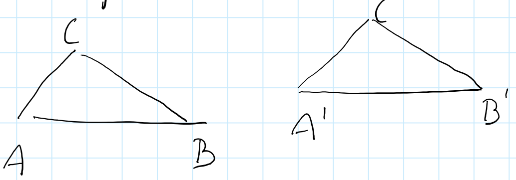
$$\gamma(\gamma(A)) = \gamma(A) = A$$

$$\gamma^2(A) = \tau_{2v}(A) \quad \text{questo accade sse } 2v = \underline{0}$$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(2v) = \frac{1}{2}\underline{0} \qquad v = \underline{0}$ contro il fatto che γ fosse glissoriflessione ($\neq$ riflessione)

Se riguardo la dimostrazione del teorema che asserisce che ogni isometria $f = \sigma_n \circ \dots \circ \sigma_1$, $n \leq 3$

Se $f(D) = D$



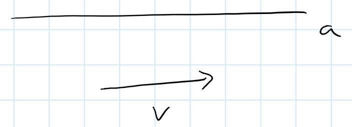
$f(X) =: X'$

$A = D \quad f = \sigma_n \circ \dots \circ \sigma_1 \quad n \leq 2$

In particolare notate che se chiamo glissoriflessione una isometria che richiede 3 riflessioni (e non meno) allora NON ha punti fissi

Intento mostrare che queste isometrie sono della forma

$\tau_v \circ \sigma_a$



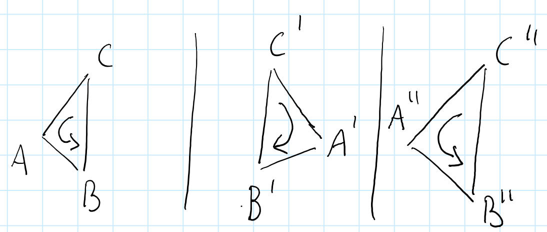
ORIENTAZIONE

Per leggere i vertici in ordine alfabetico devo ruotare in senso antiorario nel primo triangolo $T(A,B,C)$

Nel triangolo T' per leggere i vertici in ordine alfabetico devo ruotare in senso orario

<u>Def</u> Si dice che una riflessione INVERTE l'orientazione

Oss: $f = \sigma_2 \circ \sigma_1$



f è un esempio di isometria che PRESERVA l'orientazione

$f = \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ < inverte / ~~preserva~~ ?

Posso codificare la preservazione o l'inversione di orientazione di una isometria

f preserva $\longrightarrow +1$ (antiorario)

f inverte $\quad -1 \quad$ (orario)

$f = \sigma_n \circ \quad \circ \sigma_1 \longrightarrow$

$\omega(f)$ questo numero $\quad \omega(f \circ g) = \omega(f) \cdot \omega(g)$

$$\omega(f) = \omega(\sigma_n \circ \quad \circ \sigma_1) = \omega(\sigma_n) \cdot \quad \cdot \omega(\sigma_1) = (-1)^n = \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ -1 & n \text{ dispari} \end{cases}$$

ω distingue ulteriormente le isometrie

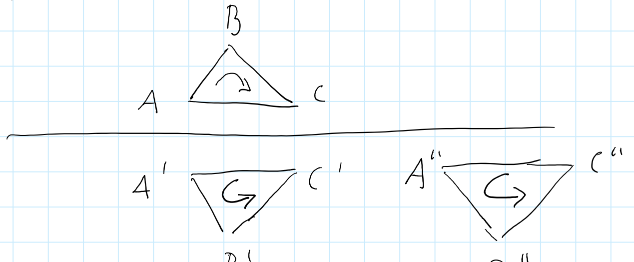
DIRETTE $\quad$ se $\omega(f) = 1$

INVERSE $\quad$ se $\omega(f) = -1$

DIRETTE	INVERSE
id	riflessioni
traslazione	glissoriflessioni
rotazioni	

$\tau_v = \sigma_a \circ \sigma_b \quad a \parallel b$, $\qquad \gamma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$

$\rho_{C,\alpha} = \sigma_a \circ \sigma_b \quad a \cap b = C$



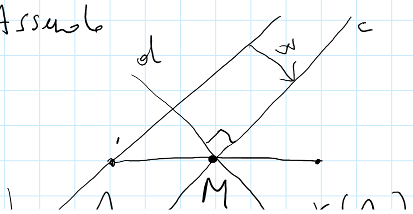
Teorema: Sia $\gamma = \sigma_r \circ \sigma_s \circ \sigma_t$ (ma non meno)
Allora γ è $\tau_v \circ \sigma_a \quad v \parallel a$.

Dim: Sia A punto tale $A \neq \gamma(A)$

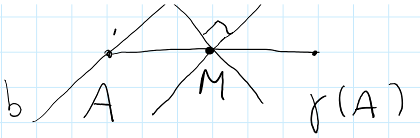
(mi basterebbe avere $\gamma \neq id$, ma se fosse $\gamma = id$

$\omega(\gamma) = \omega(id) = 1$, $\quad \omega(\gamma) = \omega(\sigma_r \circ \sigma_s \circ \sigma_t) = (-1)^3 = -1$)

Assurdo



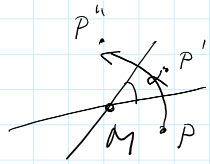
$\rho = \rho_{M, 180°}$



$\rho = \rho_{M,180°}$

$\rho\circ\gamma$ è una isometria che fissa A $\qquad \omega(\rho\circ\gamma) = \omega(\rho)\omega(\gamma) = 1\cdot -1 = -1$

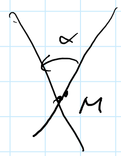
è una ISOMETRIA INVERSA con punti fissi



$\rho\circ\gamma = \sigma_b \qquad b$ asse $\qquad A \in b$

$$\rho^{-1}\circ(\rho\circ\gamma) = \rho^{-1}\circ\sigma_b$$

$$\gamma = \rho^{-1}\circ\sigma_b = \rho\circ\sigma_b$$



$\rho^{-1} = \rho$ perché $180° \equiv -180° \mod 360°$

$$\gamma = \sigma_c\circ\sigma_d\circ\sigma_b = \sigma_d\circ\sigma_c\circ\sigma_b = \sigma_d\circ\tau_{2w}$$

Dedò "Trasformazioni Geometriche"

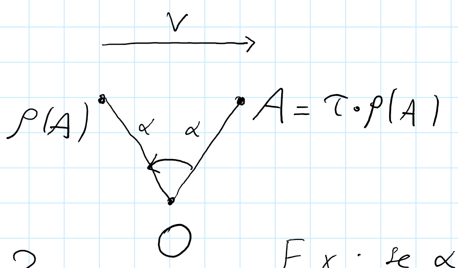
	ω	num punti fissi
id	1	tutti
rot	1	1
tra	1	0
rif	-1	asse retta fissa
gli	-1	0

$\tau_v\circ\rho_{O,2\alpha} \in \{id, rot, tra\}$

$\tau\circ\rho = id \qquad \tau^{-1}\circ(\tau\circ\rho) = \tau^{-1} \qquad \rho = \tau^{-1}$

$\tau_v^{-1} = \tau_{-v} \qquad \rho = \tau^{-1}$ può accadere solo se $\rho = \tau = id$

$\tau_v\circ\rho_{O,2\alpha}$?

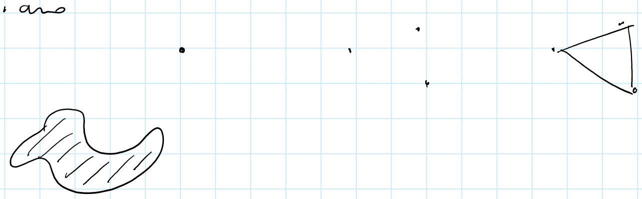


$\tau_v\circ\rho_{O,2\alpha} = \rho_{A,?}$ $\qquad$ Ex: se $\alpha = 90°$?

γ glisso~~simmetria~~riflessione $\quad \gamma = \sigma_3\circ\sigma_2\circ\sigma_1$ allora

$\gamma = \sigma_a\circ\tau_v \quad a \parallel v$

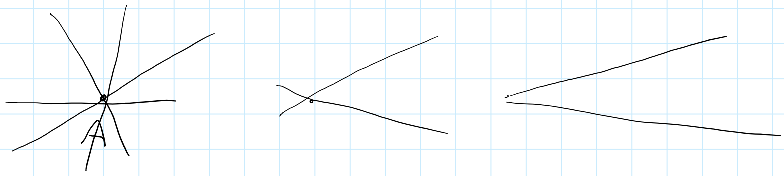
Def Si dice figura F un qualsiasi sottoinsieme del piano



Def Si chiama FASCIO di rette l'insieme delle rette

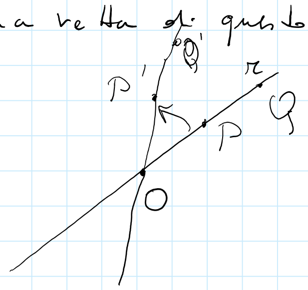
a) parallele a una retta data (FASCIO IMPROPRIO)

oppure b) passanti per un punto fissato (FASCIO PROPRIO)



Cosa accade ad un fascio di rette parallele quando applico una rotazione

Sia r una retta di questo fascio

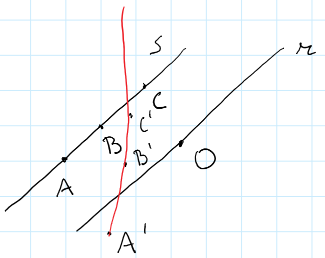


$\rho = \rho_{O,\alpha}$

$\rho(r)$?

$\rho(r) = \{\rho(P) : P \in r\}$ è la retta passante per O e formante angolo α con la retta r

$O = \rho(O)$



$\rho(s)$ rimane una retta

Segue dal fatto che se

$B \in AC \Rightarrow B' \in A'C'$

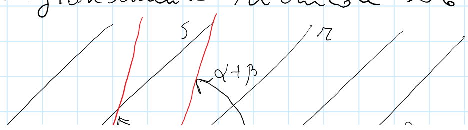
dove $X' = f(X)$ f isometria

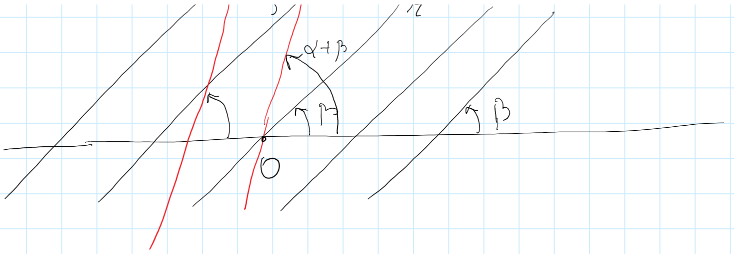
Tesi: $\rho(s) \parallel \rho(r)$ Altrimenti $\rho(s) \cap \rho(r) = D$

$D \in \rho(s), \rho(r)$ $\quad \rho^{-1}(D)$ $\quad \left(\rho(\rho^{-1}(D)) = D\right)$

$\rho^{-1}(D) \in s \cap r = \emptyset$ Assurdo non esiste D, cioè $\rho(s) \cap \rho(r) = \emptyset$

(questo ragionamento richiede solo che ρ sia invertibile)





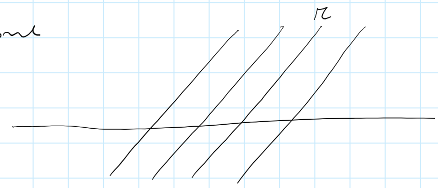
La rotazione di angolo α manda il fascio di rette di angolo β nel fascio di rette di angolo $\beta+\alpha$

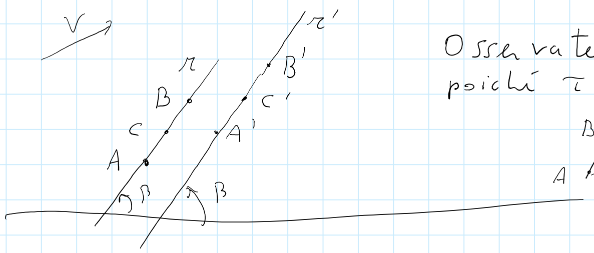
In particolare α si può ottenere come la differenza tra questi due angoli

$$\alpha = \underbrace{(\alpha+\beta)}_{\text{angolo nuovo}} - \underbrace{\beta}_{\text{angolo vecchio}}$$

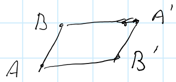
traslazione $\quad\quad \tau(r)$

$\tau = \tau_v$





Osservate che $\tau(r)$ è una retta poiché τ è una isometria

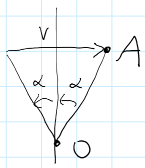


Attenzione può accadere che $\tau_v(r) = r$ (se e solo se $v \parallel r$)

In questo caso si dice che r è FISSA rispetto a τ_v

ATTENZIONE! Però $\nexists A \in r \quad \tau(A) = A$

$$\tau_v \circ \rho_{O,2\alpha} = \rho_{A,}$$



r forma angolo β con la direzione orizzontale

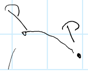
$\rho_{O,2\alpha}(r)$ retta angolo $2\alpha+\beta$ ...

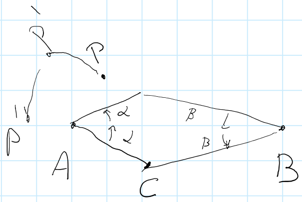
$\tau_v(\rho_{O,2\alpha}(r))$ " " $2\alpha+\beta$

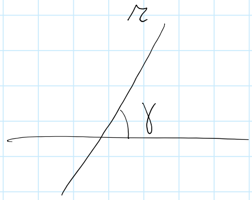
$$(r,\beta) \xrightarrow[\tau_v\circ\rho_{O,2\alpha}]{} (\underbrace{\tau_v(\rho_{O,2\alpha}}_{\rho_{A,\delta}}(r)),\ 2\alpha+\beta)$$

? $\delta = (2\alpha+\beta) - \beta = 2\alpha$

$$\tau_v \circ \rho_{O,2\alpha} = \rho_{A,2\alpha}$$







$\rho_{A,2\alpha}$, $\rho_{B,2\beta}$ $\qquad \rho_{B,2\beta}\circ\rho_{A,2\alpha}$ è quasi sempre una rotazione

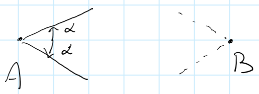
(Ex: se $A \neq B$ non è id)

C è punto fisso per questa isometria

quindi $\qquad \rho_{C,\,2\alpha+2\beta}$

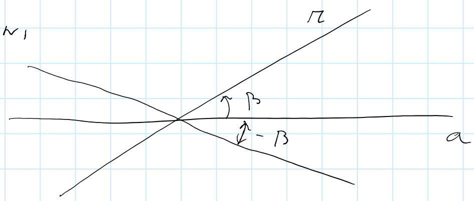
Dimostrare usando la tecnica di prima che angolo $2\alpha+2\beta$

(Ex: Può succedere che non esista C?

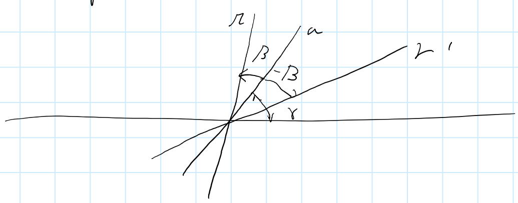


In questo caso $(\alpha=-\beta)$ ho una traslazione)

RIFLESSIONI



Ex: Cosa posso dire se a non è orizzontale



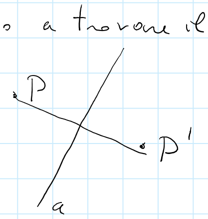
$\text{ang}\, r = \beta+\gamma$

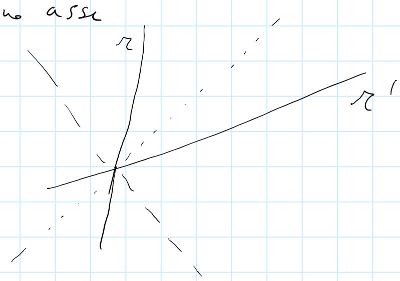
$\text{ang}\, r' = \gamma-\beta$

$= \text{ang}\, r - 2\beta$

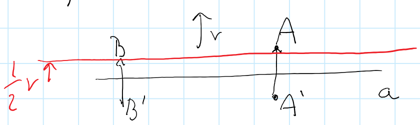
Sospetto che una certa isometria è una riflessione

come faccio a trovare il suo asse





glissoriflessione:



$\tau_v\circ\sigma_a$

$1\cdot -1$

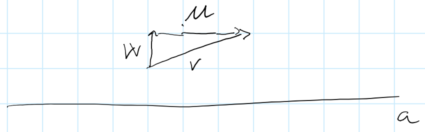
Se sposto v in modo che il suo punto medio $M \in a$ allora il suo estremo finale A è fisso

$\tau_v\circ\sigma_a(A)=A$

$1 \cdot -1$

$\tau_v \circ \sigma_a (A) = A$

$\tau_v \circ \sigma_a = \sigma_b \qquad b = \tau_{\frac{1}{2}v}(a)$



$v = w + u$

$$\tau_v \circ \sigma_a = \tau_u \circ \underbrace{\tau_w \circ \sigma_a} = \tau_u \circ \sigma_b \quad \text{dove } b = \tau_{\frac{1}{2}w}(a)$$

Se $u \neq 0$ ho ottenuto una glissoriflessione.

Def Sia F una figura nel piano

chiamo INSIEME delle SIMMETRIE di F

$\mathcal{G}(F) = \{ a,\ a \text{ isometria},\ a \text{ fissa } F \}$

ossia $\mathcal{G}(F) = \{ a,\ a \text{ isometria},\ a(F) = F \}$

$a(F) = \{ a(P) : P \in F \}$

Teorema: L'insieme delle simmetrie di una figura F costituisce un GRUPPO.

Dim: $\mathcal{G} = \mathcal{G}(F)$ Devo mostrare che

i) Se $a, b \in \mathcal{G} \Rightarrow a \circ b \in \mathcal{G}$

ii) Se $a \in \mathcal{G} \Rightarrow a^{-1} \in \mathcal{G}$

(iii) $id \in \mathcal{G}$)

i) $b(F) = F \quad a(F) = F$

$(a \circ b)(F) = a(b(F)) = a(F) = F$

ii) $\underset{\text{Tesi}}{a^{-1}(F) = F} \qquad a^{-1}(F),\ F$ sono uguali

$P \in a^{-1}(F)$ equivale esiste $Q \in F \quad P = a^{-1}(Q)$

$a(P) = a(a^{-1}(Q)) = Q \in F = a(F)$ esiste $R \in F$

$Q = a(R) \qquad a(P) = a(R) \Rightarrow P = R \in F$, ossia $P \in F$

$a^{-1}(F) \subseteq F$

(Ex: Viceversa $a^{-1}(F) \supseteq F$)

$a(F) = F \qquad a^{-1}(a(F)) = a^{-1}(F)$

$F = a^{-1}(F)$

$a^{-1}(a(F)) = \{ a^{-1}(a(P)) : P \in F \} = \{ P : P \in F \} = F$

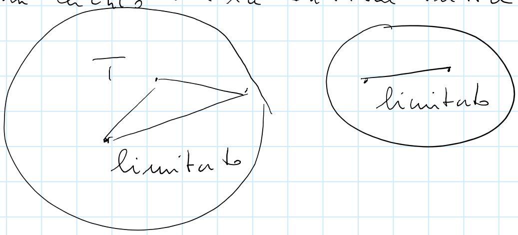
(iii) Se $a, b \in \mathcal{G} \Rightarrow a \circ b \in \mathcal{G}$ e $a^{-1} \in \mathcal{G}$)

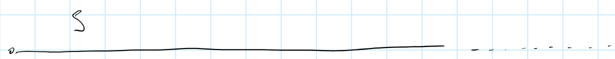
(iii) Se $a, b \in \mathcal{G} \Rightarrow a \circ b \in \mathcal{G}$ e $a^{-1} \in \mathcal{G}$

$b = a^{-1} \Rightarrow a \circ b = a \circ a^{-1} = id \in \mathcal{G}$

Def: Una figura F del piano si dice LIMITATA se esiste un cerchio che la contiene tutta

Esempio:





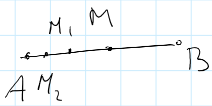
non è limitato

Fissato un punto C candidato ad essere centro di un cerchio che contiene la semiretta S, detto R il suo raggio ogni $P \in S$ $|CP| \leq R$ Assurdo poiché

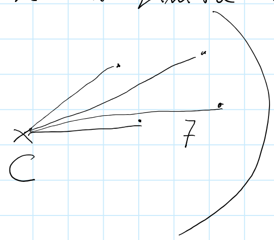
$|CP| \longrightarrow \infty$

ATTENZIONE! Una figura F può essere limitata ma INFINITA (ossia F è costituita da un numero infinito di punti)

Il segmento è limitato ma infinito



Ossia viceversa se F è finita allora è limitata



Teorema (Leonardo) Sia F una figura limitata

Allora $\mathcal{G}(F)$ non contiene né traslazioni né glissoriflessioni

Dim: Per assurdo sia $\tau_v \in \mathcal{G}(F)$
$v \neq 0$

$F \ni P \quad \tau_v(P) \quad \tau_v^2(P) \qquad \tau_v^{100.000}(P)$

$P \in F = \tau_v(F) \qquad \tau_v(P) \in \tau_v(F) = F$

Siccome i punti $\tau_v^n(P)$ fuggono all'infinito

F NON sarebbe limitata, assurdo

(È cruciale il fatto che $\tau_v \in \mathcal{G} \Rightarrow \tau_v^n \in \mathcal{G} \quad n \in \mathbb{N}$)

r NON sarebbe limitata, assurdo

(È cruciale il fatto che $\tau_v \in \mathcal{G} \Rightarrow \tau_v^n \in \mathcal{G}$ $\quad n \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$)

$\gamma = \tau_v \circ \sigma_a \in \mathcal{G} \qquad \gamma^2 \in \mathcal{G}$, $\gamma^2 = \tau_{2v}$

Cor: Se F è limitata $\mathcal{G}(F)$ contiene solo rotazioni e/o riflessioni

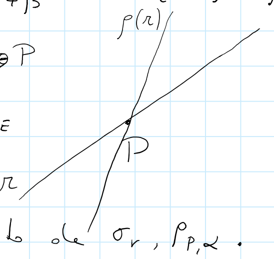
Esempi: $F = \{P\}$ $\quad \mathcal{G}(F)$? $\quad \mathcal{G}(F) = \{a,\ a \text{ isometrie},\ a(F) = F\}$
$= \{\text{''} \quad \text{''} \quad a(P) = P\}$

$\{id,\ \rho_{P,\alpha},\ \sigma_r,\ r \ni P\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad$ diedrale <u>infinito</u>

$\rho_{P,\alpha} \circ \rho_{P,\beta} = \rho_{P,\alpha+\beta}$ $\qquad \sigma_r \circ \sigma_s = \rho_{P,\,2\widehat{sr}}$

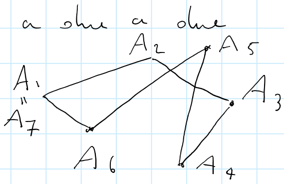
$\rho_{P,\alpha} \circ \sigma_r = \sigma_s \qquad s \ni P$

INVERTE ORIENTAZIONE



$P \in s$ infatti P è fissato da σ_r, $\rho_{P,\alpha}$.

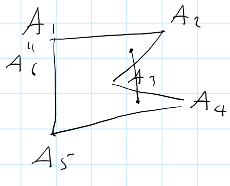
<u>Def</u> Un poligono è una figura del piano costituita da un numero finito di segmenti aventi i vertici coincidenti a due a due



Non sembra rispondere alla nozione di poligono

i) intersezioni tra i segmenti (NON SEMPLICI)

ii)

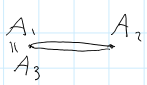


poligono NON CONVESSO (Esistono 2 punti interni ma il segmento che li congiunge non è INTERNO)

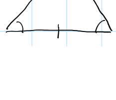
Poligoni semplici e convessi (MATEMATITA)

<u>Def</u> Si dice che F è un poligono regolare se è poligono, semplice, convesso, avente lati della stessa lunghezza e angoli interni della stessa ampiezza

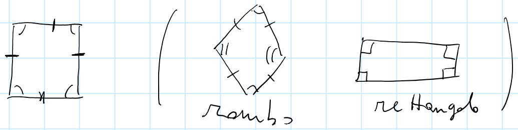
~~$n = 2$~~



$n = 3$

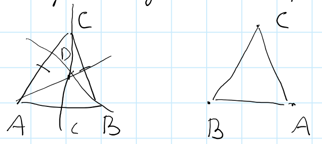


$n = 4$



$n = 3$ T triangolo regolare EQUILATERO (EQUIANGOLO)

$\mathcal{G}(T)$



σ_c c asse di AB

$\sigma_c \in \mathcal{G}$

$\sigma_c(T) = T$ $C \in c$ infatti $|CA| = |CB|$

$\underbrace{\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c}_{\text{INVERSE}} \in \mathcal{G}$ $\underbrace{id = \rho_{D,0^\circ} \quad \rho = \rho_{D,120^\circ} \quad \rho^2 = \rho_{D,240^\circ}}_{\text{DIRETTE}}$

Ce ne sono altre? σ riflessione $\sigma^2 = id$ $\sigma^{-1} = \sigma$

$\rho_{D,\alpha}^{-1} = \rho_{D,-\alpha}$ $\rho^{-1} = \rho^2$ $\rho^{-2} = (\rho^{-1})^2 = \rho$

In più dovrei testare che $\alpha \circ \beta \in \mathcal{G}$ $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{G}$

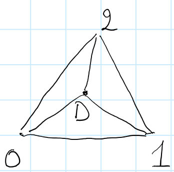
Corrisponde a 36 controlli $36 = 6 \cdot 6$

Siccome ogni isometria manda segmenti in segmenti

i lati del poligono vanno in lati del poligono

Analogamente i vertici (= intersezione di due lati)

vengono mandati in vertici



$\rho: \begin{array}{l} 0 \mapsto 1 \\ 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 0 \end{array}$ $\sigma = \sigma_0 \begin{array}{l} 0 \mapsto 0 \\ 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 1 \end{array}$

Sia α una simmetria del triangolo $\{\alpha(0), \alpha(1), \alpha(2)\} =$

$= \{0, 1, 2\}$ α può essere vista come una funzione

da $\{0, 1, 2\} \to \{0, 1, 2\}$ BIUNIVOCA

Sia β un'altra isometria $\begin{array}{l} \alpha(0) = \beta(0) \\ \alpha(1) = \beta(1) \\ \alpha(2) = \beta(2) \end{array} \Longrightarrow \alpha = \beta$

Quindi le isometrie del poligono sono al massimo

tante quante le funzioni biunivoche sui vertici.

$n = 3$ $\begin{array}{l} 0 \mapsto a \\ 1 \mapsto b \\ 2 \mapsto c \end{array}$ $3! = 6 = 3 \cdot 2 \cdot 1$

In questo caso ho al massimo 6 isometrie, ma 6

le ho già trovate $\mathcal{G} = \{ id, \rho, \rho^2, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \}$

$\rho: \begin{array}{l} 0 \mapsto 1 \\ 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 0 \end{array}$ se penso ai nomi dei vertici come classi modulo 3

$\rho: i \mapsto i+1$

$\sigma: \begin{array}{l} 0 \mapsto 0 \equiv -0 \\ 1 \mapsto 2 \equiv -1 \\ 2 \mapsto 1 \equiv -2 \end{array}$ $\quad \sigma: i \mapsto -i$

$\rho\sigma: i \xrightarrow{\sigma} -i \xrightarrow{\rho} -i+1$

Siccome $\rho\sigma$ inverte orientazione, $\rho\sigma$ riflessione

$\rho\sigma \in \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\}$

Strategia 1: disegno Stra 2: Calcolo $\rho\sigma(i)$ e $\sigma_j(i)$ $\forall i, j$ Stra 3: Determinare (l'unico) vertice v tale $\rho\sigma(v) \equiv v$ $\quad -v+1 \equiv v$

$v - v + 1 \equiv v + v \qquad 1 \equiv 2v$ esiste $\frac{1}{2}$ nelle classi di resto mod 3? ossia a $\; 2 \cdot a \equiv 1 \quad a \equiv 2 \qquad 2 \cdot 1 \equiv 2 \cdot 2 \cdot v \qquad v \equiv 2$

$\rho\sigma = \sigma_2 \qquad \rho\sigma: i \mapsto -i+1 \quad \begin{array}{l} 0 \mapsto 1 \\ 1 \mapsto 0 \\ 2 \mapsto 2 \end{array} \qquad \sigma_2: \begin{array}{l} 0 \mapsto 1 \\ 1 \mapsto 0 \\ 2 \mapsto 2 \end{array}$

$$i \xrightarrow{\sigma} -i \xrightarrow{\rho} -i+1 \xrightarrow{\sigma} i-1 = \rho^{-1}(i)$$

$$\sigma\rho\sigma = \rho^{-1} \Rightarrow \sigma\sigma\rho\sigma = \sigma\rho^{-1} \qquad \rho\sigma = \sigma\rho^{-1}$$

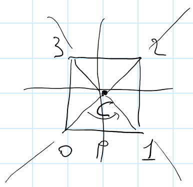
$\{id, \rho, \rho^2, \underset{\sigma_0}{\sigma}, \underset{\sigma_2}{\rho\sigma}, \underset{\sigma_1}{\rho^2\sigma}\} \qquad \rho^k\sigma^l \qquad$ k classe mod 3, l " " 2

$$\underbrace{\rho\sigma}\rho = \sigma\rho^{-1}\rho = \sigma$$

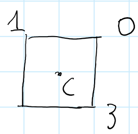
Teorema: Il gruppo delle isometrie di un poligono regolare con n lati (n-gono regolare) è costituito da n rotazioni e da n riflessioni.

N-GONO

Dim:



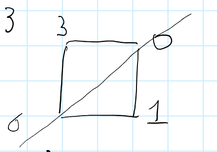
Sia C il centro del poligono (centro della circonferenza in cui il poligono è inscritto)



$\mu(0) = 2 \qquad \mu(C) = C$

$\rho^2(0) = 2 \qquad \rho^2(C) = C$

id, ρ, ρ^2, ρ^3



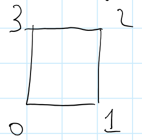
Nel primo caso $\mu(3) = 1$
$\rho^2(3) = 1 \Rightarrow \mu = \rho^2$

$$n \xrightarrow{\rho^2} ? \xrightarrow{\sigma} ?$$

Nel secondo caso $\quad C \xrightarrow{\rho^2} C \xrightarrow{\sigma} C \qquad \mu = \sigma\rho^2$

$\mu(3) = 3 \qquad 3 \xrightarrow{\rho^2} 1 \xrightarrow{\sigma} 3$

Si ha in generale



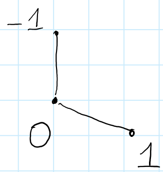
$$\mu: \begin{array}{l} 0 \longmapsto 2 \\ 1 \longmapsto 1 \\ 2 \longmapsto 0 \\ 3 \longmapsto 3 \end{array}$$

Sia μ isometria $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ $\quad \rho = \rho_{C, \frac{360°}{n}}$

$$\rho: \begin{array}{l} 0 \longmapsto 1 \\ 1 \longmapsto 2 \\ \vdots \\ n-1 \longmapsto 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \rho(i) = i+1 \\ \rho^2(i) = i+2 \\ \rho^k(i) = i+k \end{array}$$

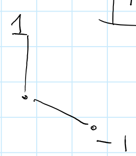
$\mu(0) = k \qquad \rho^k(0) = k \qquad \rho^{-k}\mu(0) = 0$

$\rho^{-k}\mu(C) = C$



Se $\rho^{-k}\mu(1) = 1 \Rightarrow \rho^{-k}\mu = id \quad \boxed{\mu = \rho^k}$

Se $\rho^{-k}\mu(1) = -1$



Sia $\sigma: i \longmapsto -i$ è la riflessione con asse per O e C

$$\sigma\rho^{-k}\mu \quad \begin{array}{l} 0 \longmapsto 0 \\ C \longmapsto C \\ 1 \longmapsto 1 \end{array} \qquad \sigma\rho^{-k}\mu = id \Rightarrow \rho^{-k}\mu = \sigma$$

$$\boxed{\mu = \rho^k\sigma}$$

Ex: $\rho^k\sigma$ sono tutte e sole le riflessioni

$\rho = \rho_{C, \frac{360°}{n}} \qquad \rho: i \longmapsto i+1$

σ riflessione $\sigma: i \longmapsto -i$ (asse passa per O e C)

Teorema: Sia $F = P_n$ n-gono regolare

$$\mathcal{G}(F) = \{\rho^k, \rho^k\sigma : 0 \leq k \leq n-1\} \qquad \begin{array}{l} \rho^0 = id \\ \rho^n = id \end{array}$$

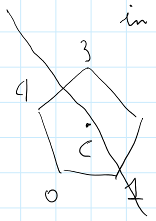
$\rho^k\sigma$ è una riflessione il cui asse passa per centro C del poligono, infatti C è fissato da ogni $\alpha \in \mathcal{G}(F)$

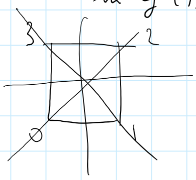
Conseguenze del Teorema

1) $|\mathcal{G}(P_n)| = 2n \leq n!$

2) |Isometrie inverse in $\mathcal{G}(P_n)$| = |Isometrie dirette in $\mathcal{G}(P_n)$| $= n$

2) $|$Isometrie inverse in $\mathcal{G}(P_n)| = |$isometrie dirette in $\mathcal{G}(P_n)| = n$





asse: retta 1 e C oppure asse di 3 4

Se n è dispari gli assi delle n riflessioni passano per un solo vertice e per C

Se n è pari, ossia $n = 2m$, allora ci sono m assi contenenti 2 vertici (un vertice e il suo opposto)
m assi che sono assi di 2 lati opposti

$n = 7$ $\quad \rho = \rho_{C, \frac{360°}{7}}$ $\quad \sigma$ riflessione con asse per 0

$$\rho^3\sigma : i \xmapsto{\sigma} -i \xmapsto{\rho^3} -i+3$$

Trovare i tale che $\quad i \equiv_7 -i+3 \qquad 2i \equiv_7 3$

Per tentativi posso scoprire $i \equiv_7 5 \qquad \frac{1}{2} \equiv_7 4$

$$4 \cdot 2 \cdot i \equiv_7 4 \cdot 3$$
$$i \equiv_7 12 \equiv_7 5$$

$n = 6$ $\quad \rho = \rho_{C, 60°}$ $\quad \sigma$ asse per 0 e 3

$$\rho^2\sigma : i \longmapsto -i \longmapsto -i+2$$

$i \equiv_6 -i+2 \qquad 2i \equiv_6 2 \qquad \{0,1,2,3,4,5\}$
$\{0,2,4,0,2,4\}$

$i = 1, \; 1+3 = 4$ $\quad$ Notate che 1 e 4 sono vertici opposti

$$2i = 2 + 6k$$
$$i = 1 + 3k$$

$k = 0 \quad i = 1$
$k = 1 \quad i = 4$
$k = 2 \quad i = 7 \equiv_7 1$

Ex Determinare $\frac{1}{2}$ nelle classi di resto modulo $n = 2m+1$

SIMILITUDINE

È una trasformazione del piano per cui esiste un k numero tale che $|P'Q'| = k\,|PQ|$

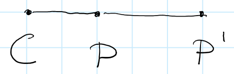
<u>Def</u> k viene detto il rapporto della similitudine

<u>Def</u> Dico che 2 figure F, F' sono simili se

Esiste una similitudine δ tale che $\delta(F) = F'$

Esempi: Se δ è una ISOMETRIA allora è una similitudine di rapporto $k = 1$

<u>Def</u> L'OMOTETIA di centro C e parametro k è ($k > 0$) la seguente trasformazione



$P \neq C$ il corrispondente P' di P i) sta sulla retta per CP

ii) $|CP'| = k\,|CP|$

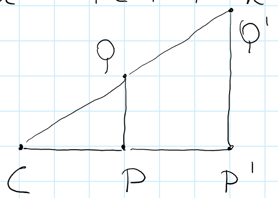
iii) CP' ha lo stesso verso di CP

Indico con $\omega_{C,k}$ questa omotetia

$P = C \quad C' = C$

In particolare $|C'P'| = k\,|CP|$

$k = 2$



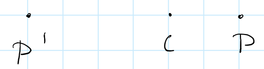
i triangoli PCQ e $P'CQ'$ hanno angoli di uguale ampiezza

Per il Teorema di Talete si $k = \underbrace{\frac{|CP'|}{|CP|}}_{\text{per def di } \omega} = \frac{|CQ'|}{|CQ|} = \underbrace{\frac{|P'Q'|}{|PQ|}}_{\text{Talete}}$

$|P'Q'| = k\,|PQ|$

Posso estendere la definizione di omotetia anche quando il parametro $k < 0$

$k = -2$



i) $P' \in$ retta per C e P

ii) $|CP'| = |k|\,|CP|$

iii) CP' ha verso opposto di CP

Teorema: $\omega_{C,k}$ è una similitudine di rapporto $|k|$

Oss: Notate che il rapporto di una similitudine è sempre ≥ 0

Cosa è la similitudine di rapporto 0

$|P'Q'| = 0\,|PQ| \qquad |P'Q'| = 0$

Se fisso P e chiamo $R = P'$, Q arbitrario

$|P'Q'| = 0 \quad |RQ'| = 0 \quad Q' = R$

In questo caso $Q' = R$ lo stesso punto per ogni Q

Per questo motivo si chiamano similitudini solo le trasformazioni $k > 0$.

Def: Si chiama SIMILITUDINE di RAPPORTO k una trasformazione δ del piano per ogni P, Q

$$|P'Q'| = k\,|PQ|$$

dove $X' = \delta(X)$

Siccome k è il rapporto $\dfrac{|P'Q'|}{|PQ|} \geq 0$

e $k = 0$ è banale

$k > 0$

OMOTETIE di centro C e parametro $\ell \neq 0$ sono similitudini di rapporto $|\ell|$

Teorema: Siano δ_1 e δ_2 similitudini di rapporto k_1, k_2 $(k_i > 0)$. Allora $\delta_2 \circ \delta_1$ è ancora similitudine di rapporto $k_2 k_1$

Dim: $X' = \delta_1(X)$, $X'' = \delta_2(X')$ $\quad \delta := \delta_2 \circ \delta_1$

$X'' = \delta(X) \qquad |P''Q''| = k_2\,|P'Q'| = \underbrace{k_2\,k_1}\,|PQ|$

per ogni P, Q nel piano

Cor: L'inversa di una similitudine di rapporto k è ancora una similitudine di rapporto ? k^{-1}

$X' = \delta(X) \qquad |P'Q'| = k\,|PQ|$

$\delta^{-1}(X') = X \qquad |PQ| = k^{-1}\,|P'Q'|$

Infatti $\quad \delta^{-1} \circ \delta = id \quad \ell = k^{-1}$ rapporto di δ^{-1}

$\ell \cdot k = 1$

Oss: Le isometrie sono particolari similitudini ossia tutte e sole quelle di rapporto 1

Se indico con $\mathcal{S}$ simil. $\mathcal{I}$ isometrie

$\mathcal{I} \subseteq \mathcal{S}$. $\mathcal{I}$ è in realtà SOTTOGRUPPO

In generale un sottoinsieme di un gruppo NON è un gruppo Es: $\mathcal{G}(T)$ T triangolo equilatero

$$\{id, \rho, \rho^2, \sigma, \sigma\rho, \sigma\rho^2\} \supseteq \{id, \rho\}$$

$\mathcal{J} \subseteq \mathcal{G}$ è un SOTTOGRUPPO poiché è un gruppo per i fatti suoi

Def Indico con $k(\delta)$ il rapporto della simil. δ

Teorema: $k(\delta_2 \circ \delta_1) = k(\delta_2) k(\delta_1)$

δ è una isometria se e solo se $k(\delta) = 1$

$k(\delta_1) = 1$, $k(\delta_2) = 1$ $\quad k(\delta_2 \circ \delta_1) = k(\delta_2) k(\delta_1) = 1 \cdot 1 = 1$

Teorema: Sia δ una similitudine di rapporto k
Allora δ è la composizione di una isometria con una (qualsiasi) omotetia di parametro k

Dim: $\delta = \omega \circ i$ devo determinare omotetia ω, isometria i

Prendo una qualsiasi omotetia ω di rapporto k

$\omega^{-1} \circ \delta$ è una similitudine

basta mostrare che $(\omega_{C,k})^{-1} = \omega_{C,k^{-1}}$

C P P'

ma $k(\omega^{-1} \circ \delta) = k(\omega^{-1}) \cdot k(\delta) = k(\omega)^{-1} \cdot k(\delta) = 1$

quindi $\omega^{-1} \circ \delta$ è una isometria, i, $\omega^{-1} \circ \delta = i$

$$\underbrace{\omega \circ (\omega^{-1} \circ \delta)}_{\delta} = \omega \circ i$$

$$\delta = \omega \circ i$$

Teorema: Sia δ similitudine avente 3 punti fissi non allineati. Allora $\delta = id$

Dim: A, B, C fissi $\quad |A'B'| = |AB| \quad |A'B'| = k\,|AB|$

$\implies k = 1$, quindi δ isometria

posso applicare Teorema di Eulero $\delta = id$.

Def Date due figure F e F' nel piano dico che F' è CONGRUENTE ad F se esiste una isometria i $\; i(F) = F'$

Def Date due figure F e F' nel piano dico che F' è SIMILE a F se esiste una similitudine δ $\; \delta(F) = F'$.

In particolare figure congruenti sono figure simili

Prop: La relazione $F \mathcal{E} F'$ definita da F' è simile a F è di equivalenza

Dim: $F \mathcal{E} F \iff \exists$ sim δ $\; \delta(F) = F$ $\; \delta = id$

$F \mathcal{E} F' \Rightarrow F' \mathcal{E} F$

$\delta(F) = F' \Rightarrow \delta^{-1}(F') = F$

$F \mathcal{E} F'$ e $F' \mathcal{E} F'' \Rightarrow F \mathcal{E} F''$

$\delta(F) = F'$ $\; \eta(F') = F'' \Rightarrow (\eta \circ \delta)(F) = F''$

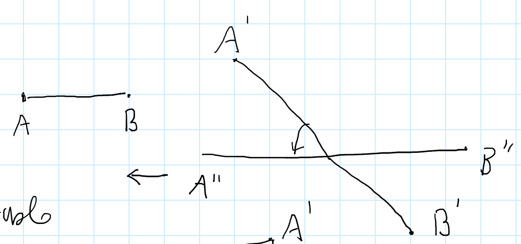
δ, η similitudine

Il fatto che $\mathcal{E}$ è di equivalenza equivale logicamente al fatto l'insieme delle similitudini è un gruppo

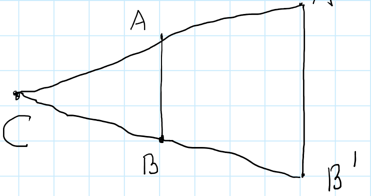
Problema: Quando figure sono simili?

F figure semplici: $\underset{P}{\cdot}$ $\quad F = \{P\}$ $\quad \delta(F) = \{\delta(P)\}$

insieme con $\delta(P)$ come unico elemento

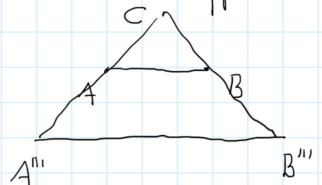


traslo



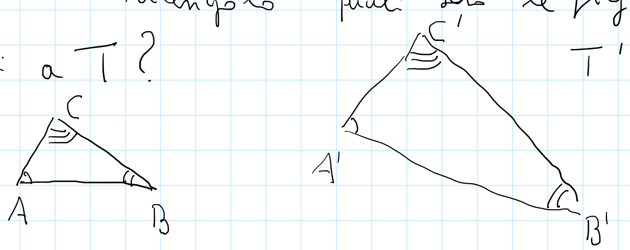
Se presto l'omotetia ω di centro $C = r(A,A') \cap r(B,B')$ e rapporto $|A'B'|/|AB|$

$\omega(AB) = A'B'$



$AB \xrightarrow{\omega} A'''B''' \xrightarrow{rot} A'B'$

Esempio T triangolo quali sono le figure simili a T?



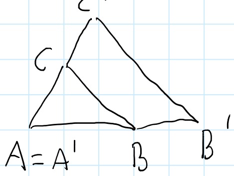
k il rapporto di una similitudine f $\quad f(T)=T'$

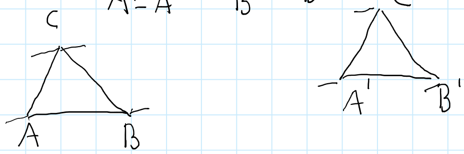
$$k = \frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|A'C'|}{|AC|} = \frac{|B'C'|}{|BC|}$$ condizione necessaria

in realtà è anche sufficiente

Viceversa ruoto T' in modo che $AB \parallel A'B'$

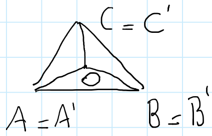
allora lo stesso vale per gli altri lati traslo A' su A





In questo caso $CC' \parallel AA'$ $\quad T$ e T' sono congruenti

$v = \overrightarrow{C'C} \quad \tau_v(T') = T$



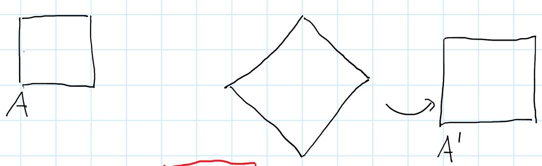
$\omega_{O,k}(X) = X'$

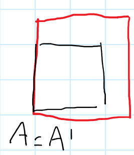
$\omega_{O,1}$ $(= id)$

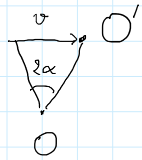
Nel caso dei triangoli il concetto di SIMILARITÀ ($\neq$ similitudine) è quello usuale

ossia T e T' sono simili $\Longleftrightarrow$ il rapporto tra lati corrispondenti è costante $\Leftrightarrow$ ampiezze degli angoli interni sono uguali a 2 a 2

$n = 4$ $\quad Q$ quadrato $\quad F$ simile a Q?





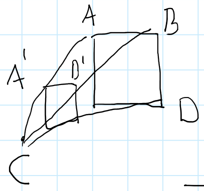


Viceversa

Viceversa 

$i(Q)$ quadrato

i isometria

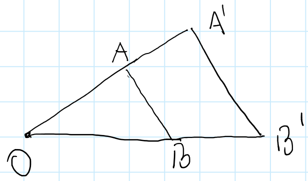


$|A'B'| = k|AB|$

$|B'D'| = k|BD|$

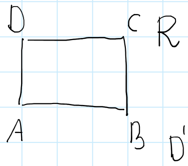
$$\frac{|A'B'|}{|B'D'|} = \frac{\cancel{k}|AB|}{\cancel{k}|BD|} = 1$$

Similitudine conserva le ampiezze degli angoli

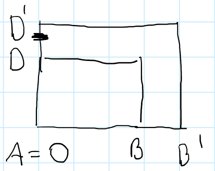


(posso considerare omotetia di centro O)

$n = 4$



$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{3}{2}$$

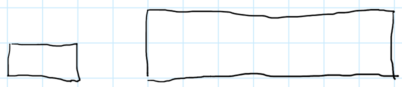


$$\frac{|A'B'|}{|A'D'|} = \frac{k|AB|}{k|AD|} = \frac{|AB|}{|AD|}$$

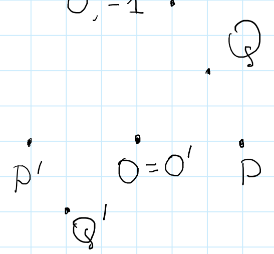
$$k = \frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{4}{3} \qquad |A'D'| = \frac{4}{3} \cdot |AD| = \frac{8}{3} \approx 2,\overline{6}$$

Attenzione Due poligoni NON sono necessariamente simili se hanno i lati a 2 a 2 paralleli

(è vero per i triangoli)

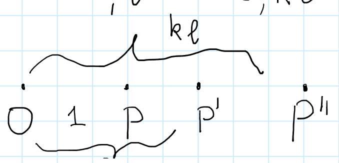


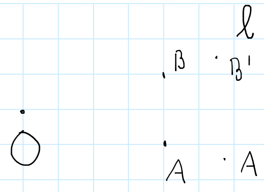
Osservazione: $\omega_{O,-1}$? $\qquad \omega_{O,-1} = \rho_{O,180°}$



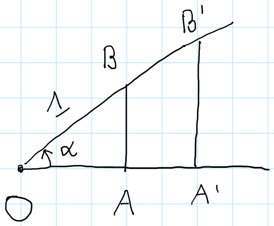
$$\omega_{O,-15} = \omega_{O,-1} \circ \omega_{O,15} = \rho_{O,180°} \circ \omega_{O,15}$$

$$\omega_{O,k} \circ \omega_{O,\ell} = \omega_{O,k\ell}$$





FUNZIONI TRIGONOMETRICHE



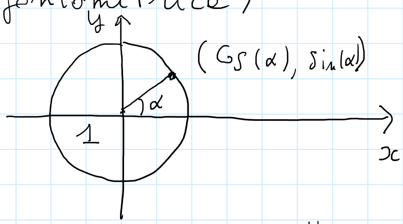
$$\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OA'|}{|OB'|}$$ dipende solo da α

pertanto è una funzione di α $\cos(\alpha)$ coseno di α

$$\frac{|AB|}{|OB|} = \frac{|A'B'|}{|OB'|}$$ " " α $\sin(\alpha)$ seno di α

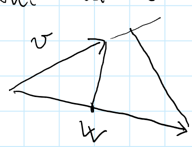
$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$ tangente di α

Fissare l'attenzione sulla circonferenza di raggio 1 (goniometrica)



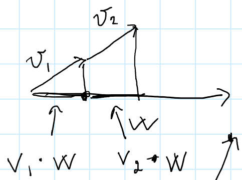
Introdurre una operazioni sui vettori

prodotto scalare

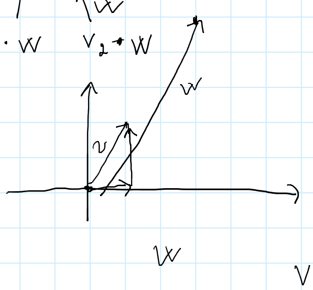


$v \cdot w = w \cdot v$

$(v_1 + v_2) \cdot w = v_1 \cdot w + v_2 \cdot w$



$v = (1, 2)$



$v = (1,0) + 2\cdot(0,1)$

$w = 3\cdot(1,0) + 5\cdot(0,1)$

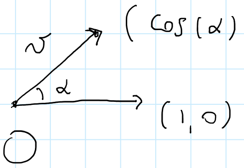
$w = (3, 5)$

$v \cdot w$

$v \cdot w = ((1,0) + 2(0,1)) \cdot w = (1,0)\cdot w + 2(0,1)\cdot w =$

$= (1,0)\cdot 3\cdot(1,0) + (1,0)\cdot 5(0,1) + 2(0,1)\cdot 3(1,0) + 2(0,1)\cdot 5(0,1)$

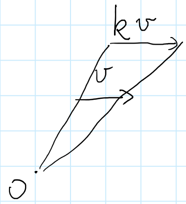
$= 3\cdot 1 + 0 + 0 + 2\cdot 5 = 13$



$v\cdot(1,0) = ?$ $\quad v\cdot(1,0) = \cos(\alpha)$

$v\cdot w = |v||w|\cos\widehat{vw}$

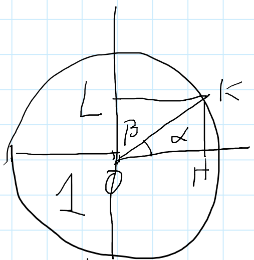
Applico omotetia di rapporto k $\quad v \longmapsto$



Notate che $\omega_{O,k}(v)$ è ancora un vettore parallelo a v

$\cos(\widehat{vw}) = \dfrac{v\cdot w}{|v||w|}$ $\qquad \dfrac{\cancel{k}v\cdot \cancel{k}w}{\cancel{k}|v|\,\cancel{k}|w|}$ ancora è lo valore di prima quindi le omotetie conservano gli angoli e lo stesso vale similitudini

Valori particolari per queste funzioni



$OH = \cos(\alpha)$

$KH = \sin(\alpha)$

$\alpha + \beta = 90°$

complementari

$\sin(\beta) = \cos(\alpha)$

$\cos(\beta) = \sin(\alpha)$

$x := \cos 45° = \sin 45°$

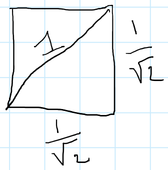
α	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$
0°	1	0
90°	0	1
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
30°		

Teorema di Pitagora implica

$$1 = \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)$$

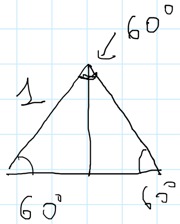
Quando $\alpha = 45°$ $\qquad 1 = x^2 + x^2 = 2x^2$

$x^2 = \frac{1}{2} \qquad x = \frac{1}{\sqrt{2}}$



60°

$\frac{1}{\sqrt{2}}$



$\cos 60° = \frac{1}{2}$

$x = \sin 60°$

$1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + x^2 \qquad \frac{3}{4} = x^2 \qquad \frac{\sqrt{3}}{2} = x$

72° ? pentagono regolare

Similitudini applicate alla costruzione di scale

Cartina in scala $1 : s$ ($1 : 10.000$, $1 : 5000$, ...)

Gli oggetti riportati nella cartina sono una riproduzione simile di oggetti reali (sentiero, appartamenti, ...)

Ad esempio un segmento di lunghezza l in cartina corrisponde a un segmento nella realtà $L = s\,l$

Esempio: $s = 10.000$ $\quad l = 1\,cm$

$$L = 10.000 \cdot 1\,cm = 10.000\,cm =$$

$$10.000\,\frac{1}{100}\,m = 100\,m = 100 \cdot \frac{1}{1000}\,km = \frac{1}{10}\,km$$

$$= 0.1\,Km$$

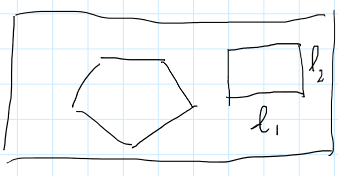
Notazione esponenziale per numeri in base 10

$$d \cdot 10^e \quad e \in \mathbb{Z} \quad 1 \le d < 10$$

$10.000 = 1 \cdot 10^4$

$257000{,}14 = 2{,}5700014 \cdot 10^5$

$$L = 10^4 \cdot 10^{-5}\,Km = 10^{4-5}\,Km = 10^{-1}\,Km$$



$s = 10.000$

$A = s^2\,a \qquad L_1 = s\,l_1$

reale aree cartina $L_2 = s\ell_2$

$$A = L_1 L_2 = s\ell_1 s\ell_2 = s^2 \ell_1 \ell_2 = s^2 a$$

Plastico $V = s^3 v$ s rapporto di scala

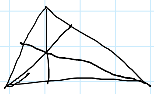
$v = 1\ cm^3$ $s = 10^4$

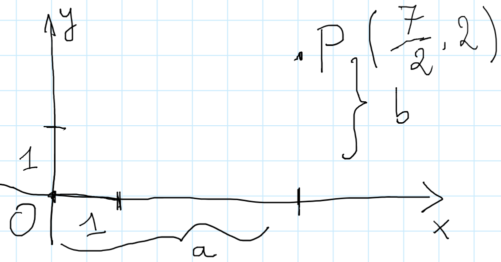
$$V = (10^4)^3 \cdot 1\ cm^3 = 10^{12}\ cm^3 = 10^{12} \cdot 10^{-6}\ m^3 = 10^6\ m^3$$

$1\ m = 10^2\ cm$ $1\ m^3 = 10^6\ cm^3$

$1\ cm^3 = 10^{-6}\ m^3$ cm^3

Piano Cartesiano

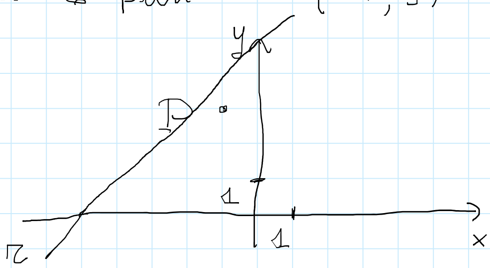




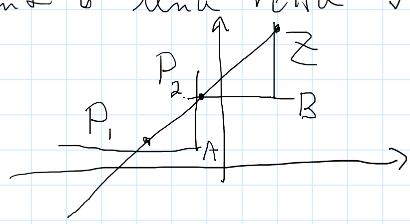
sistema di riferimento 2 rette con verso assi ortogonali

Individuo ogni punto del piano P con le sue coordinate

Viceversa dati $a, b \in \mathbb{R}$ individuano un unico punto $(-1, 3)$



retta esiste un modo di caratterizzare i punti di una retta via coordinate



$P_1 (x_1, y_1)$

$P_2 (x_2, y_2)$

$Z (x, y)$

$A (x_2, y_1)$

Teorema di Talete

Teorema di Talete

$$\frac{P_2 A}{P_1 A} = \frac{ZB}{P_2 B}$$

$A(x_2, y_1)$

$B(x, y_2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_2}{x - x_2}$$

$$y - y_2 = m(x - x_2)$$

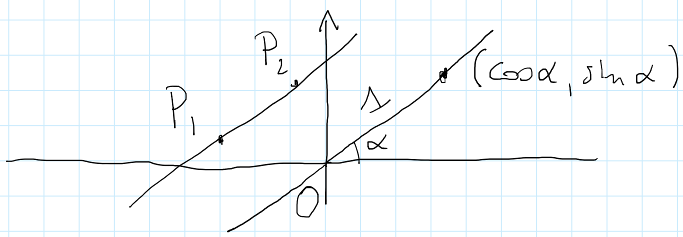
$$y = mx \underbrace{- mx_2 + y_2}_{= q}$$

$$y = mx + q$$

dove m, q dipendono solo dalle coordinate di P_1 e P_2

$y = mx + q$ l'equazione della (UNICA) retta per P_1, P_2

m coefficiente angolare di r



$$m = \frac{\sin\alpha - 0}{\cos\alpha - 0} = \tan\alpha$$

r: $y = mx + q$

$P(0, ?) \in r$ $\quad y_P = m \cdot x_P + q$

$y_P = m \cdot 0 + q = q$ l'ordinata del punto $P(0, q) \in r$

Che equazione hanno i 2 assi

asse delle x (orizzontale) $y = 0$

$y = mx + q \quad m = q = 0 \quad m = 0 = \tan 0^\circ$

asse delle y (verticale)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$x = 0$

Assi paralleli asse y $x = c$ costante

$y = mx + q$ ∦ asse y

$x = c$ ∥ " "

$$\boxed{ax + by + c = 0} \quad (a,b) \neq (0,0)$$

$mx - y + q \qquad a = m,\ b = -1,\ c = q$

$x = c \quad -x + c = 0 \qquad a = -1,\ b = 0,\ c = c$

EQUAZIONE GENERALE RETTA

$r: 2x - y + 2 = 0$

$s: 4x - 2y + 4 = 0 \qquad 2(2x - y + 2) = 0$

$r = s$

$$ax + by + c = 0$$

$$adx + bdy + cd = 0 \qquad d \neq 0$$

$ax + by + c = 0 \quad b \neq 0 \quad y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \quad y = mx + q \quad m = -\frac{a}{b}$

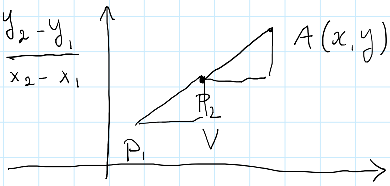
$q = -\frac{c}{b}$

$b = 0 \quad ax + c = 0 \quad x = -\frac{c}{a}$ (ricordate $(a,b) \neq (0,0)$)

$a \neq 0$

$r: y = mx + q \qquad P_1(x_1, y_1)\ P_2(x_2, y_2) \qquad x_2 \neq x_1$

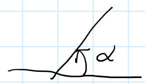
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$



$y_2 - y_1 = |P_2 V|$

$x_2 - x_1 = |P_1 V|$

m non dipende da P_1 e P_2 $\quad m = \tan(\alpha)$



$A(x_A, y_A),\ B(x_B, y_B) \in r \qquad A \neq B$

$$y_A = mx_A + q \qquad y_B = mx_B + q$$

$y_A - y_B = mx_A + q - mx_B - q = m(x_A - x_B) \qquad x_A \neq x_B$

$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$ m ossia si esprime sempre in questa forma $\forall A, B \in r \quad A \neq B$, r ∦ asse y

Criteri di parallelismo tra rette

$r: y = mx + q \qquad s: y = nx + t \qquad m, q, n, t \in \mathbb{R}$

Quando $r \parallel s$? Risposta sse $m = n$

Se $r \parallel s$ allora formano uguali angoli asse x

$\alpha, \beta \qquad m = \tan(\alpha) = \tan(\beta) = n$

$\alpha, \beta \qquad m = tn(\alpha) = tn(\beta) = n$

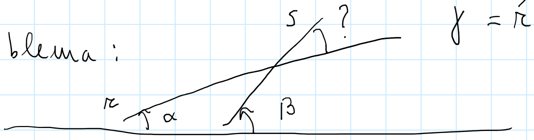
Viceversa $m = n$ $\begin{cases} y = mx + q \\ y = mx + t \end{cases}$ sistema

determinare $x, y \in \mathbb{R}$ soddisfano le 2 equazioni

$0 = y - y = mx + q - mx - t = q - t$ $\begin{cases} q = t & r = s \\ q \neq t & r \cap s = \emptyset \quad r \parallel s \end{cases}$

Ex: cosa accade se $s: x = c$?

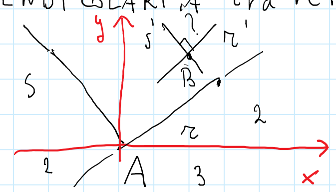
Problema: $\gamma = \widehat{rs}$?



Viceversa $r: y = mx + q$ $\quad \gamma = \widehat{rs}$ quanto vale

coeff. angolare di s: $nx + t$

CRITERIO PERPENDICOLARITÀ tra rette

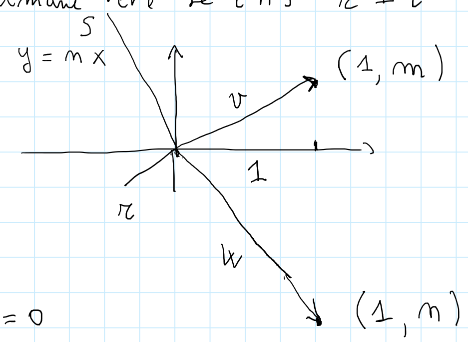


$r: y = \frac{2}{3}x$

$s: y = -\frac{3}{2}x$

Essere $r \perp s$ rimane vero se $t \parallel s$ $\quad r \perp t$

$r: y = mx \qquad s: y = nx$



$v \perp w \qquad v \cdot w = 0$

$1 \cdot 1 + m \cdot n = 0 \qquad \boxed{n = -\frac{1}{m}}$

Equazione generale: $r: ax + by + c = 0$

$r': a'x + b'y + c' = 0$

$r \parallel r'$ se $b, b' \neq 0$ $\quad -\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'} \qquad \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = -m$

sse esiste $m \neq 0$ tale che $a' = ma \quad b' = mb$

$r: max + mby + mc = 0 \qquad a'x + b'y + mc = 0$

$\begin{cases} a'x + b'y + mc = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases} \qquad mc - c' = 0$

$r \perp r' \quad m = -\frac{a}{b} \quad n = -\frac{a'}{b'} \qquad n = -\frac{1}{m} \qquad -\frac{a'}{b'} = \frac{b}{a}$

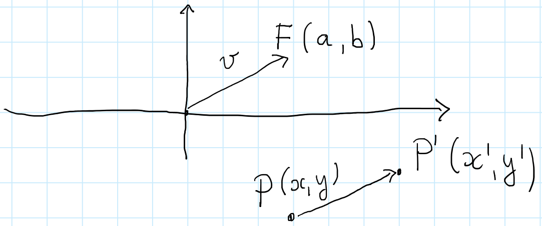
$-aa' = bb' \qquad aa' + bb' = 0$

si può interpretare come l'annullarsi del prodotto scalare tra i vettori $v=(a,b)$ $\quad v'=(a',b')$

DESCRIZIONE CARTESIANA DI (ALCUNE) ISOMETRIE

Hofstadter "Goedel, Escher e Bach ..."

TRASLAZIONI: τ_v $\quad v$ vettore $\quad v=(a,b)$



$x' = x+a$

$y' = y+b$

$v = (3, \frac{3}{2})$

$P = (3,-3)$

$P' = (6, -\frac{3}{2}) = (3,-3) + (3, \frac{3}{2}) = (6, -\frac{3}{2})$

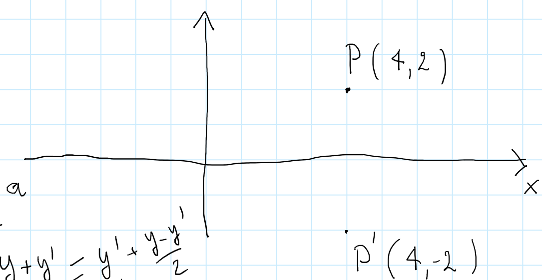
$v' = (a', b') \qquad (x,y) \xmapsto[\substack{\tau_v \\ v=(a,b)}]{} (x+a, y+b)$

$\tau_{v'} \circ \tau_v = \tau_s$

$(x,y) \xmapsto{\tau_v} (x+a, y+b) \xmapsto{\tau_{v'}} (x+a+a', y+b'+b)$

$s = (a+a', b+b') = v+v'$

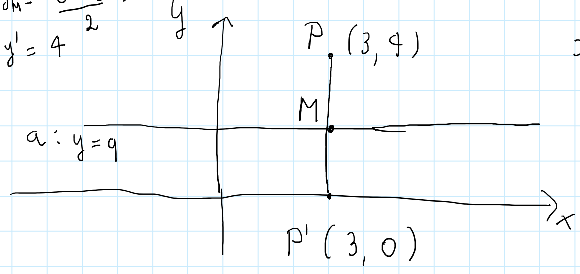
RIFLESSIONI



$x' = x$

$y' = -y$

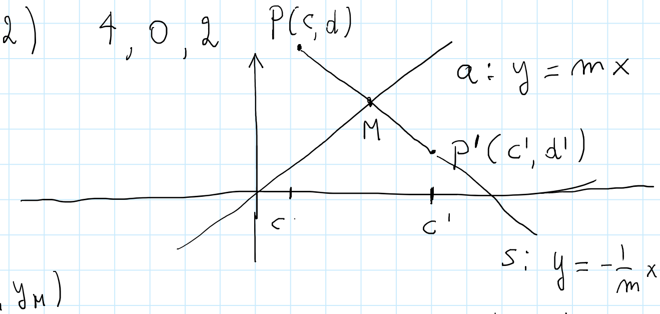
$\begin{cases} y = 7 \\ y_M = \dfrac{y+y'}{2} = y' + \dfrac{y-y'}{2} \\ y' = 4 \end{cases}$



$x' = x$

$y' = 2q - y$

$M(3,2) \qquad 4, 0, 2$



$s: \; y = -\frac{1}{m}x + q$

$d = -\frac{1}{m}c + q$

$M(x_M, y_M)$

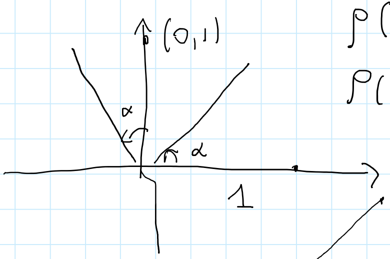
$x_M = \dfrac{c+c'}{2} \qquad y_M = \dfrac{d+d'}{2}$

$M(x_M, y_M)$

$d = -\frac{1}{m} c + q$

$x_M = \frac{c + c'}{2} \qquad y_M = \frac{d + d'}{2}$

ROTAZIONE



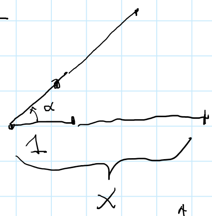
$\rho(1,0) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$

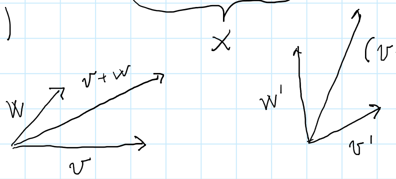
$\rho(0,1) = (\ ?\ \ ?\ )$
$(-\sin(\alpha), \cos(\alpha))$

$\rho = \rho_{O,\alpha}$

$(x, 0) = x\,(1, 0)$

$\rho((x,0)) = x\,\rho((1,0))$





$\rho(v+w) = \rho(v) + \rho(w)$

$P(x,y)$ punto finale $\quad x(1,0) + y(0,1) = (x,0) + (0,y)$
$= (x, y)$

$\rho(P) = \rho((x,y)) = x\,\rho(1,0) + y\,\rho(0,1)$

$= (x\cos\alpha, x\sin\alpha) + (-y\sin\alpha, y\cos\alpha)$

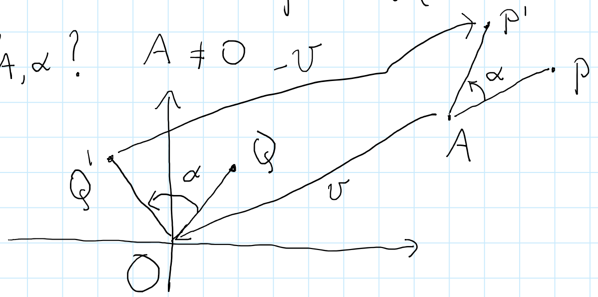
$(x\cos\alpha - y\sin\alpha,\ x\sin\alpha + y\cos\alpha)$

Ex: Usando $\rho_{O,\alpha} \cdot \rho_{O,\beta} = \rho_{O,\alpha+\beta}$

$\cos(\alpha+\beta), \ \sin(\alpha+\beta)$

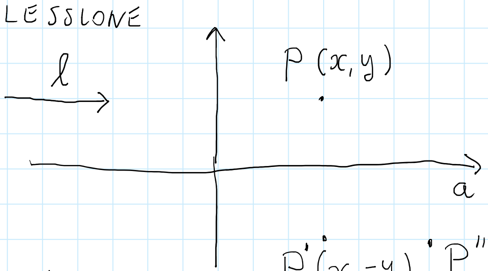
Si può descrivere in formula (coordinate cartesiane)

$\rho_{A,\alpha}$? $\quad A \neq O \quad -v$



$\rho_{A,\alpha} = \tau_{-v} \circ \rho_{O,\alpha} \circ \tau_v$

GLISSORIFLESSIONE



a = asse x

$P'(x,-y) \quad P''(x+\ell, -y)$

$(x,y) \xmapsto{\gamma} (x+\ell, -y) \xmapsto{\gamma} (x+2\ell, y)$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{2}$

τ_{2l}

FREGI e i LORO GRUPPI

$F \subseteq \pi$ piano $\quad \mathcal{G}(F) = \{\sigma \text{ isometrie} : \sigma(F) = F\}$

Se F è limitata, allora $\mathcal{G}(F)$ (Teorema di Leonardo)

CICLICO : rotazioni

DIEDRALE : n rotazioni n riflessioni

7 gruppi dei fregi (vedi Johson "Symmetries")
FRIEZES

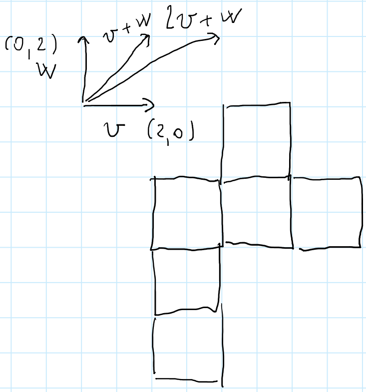
Le traslazioni sono tutte della forma t^n $n \in \mathbb{Z}$

t traslazione di vettore di lunghezza minima

MOSAICI

Figure $F \subseteq \pi$ piano $\mathcal{G}(F) \ni t, s$ traslazioni

$t = \tau_v$, $s = \tau_w$ $\quad v \not\parallel w$



$$mv + mw = (2n, 2m)$$

$$\frac{2m}{2n} = \frac{m}{n}$$

GEOMETRIA VISTA COME SISTEMA IPOTETICO-DEDUTTIVO

Euclide 300 a.c.

Oggetti primitivi : rette, punti, circonferenze, piano

ASSIOMI : proprietà che gli oggetti primitivi soddisfano

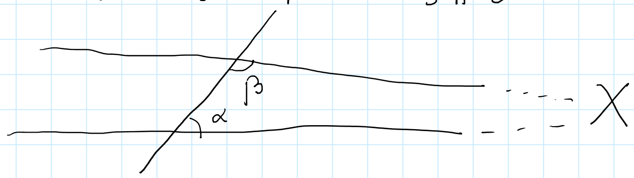
A_1) Dati 2 punti distinti passa UNA retta

A_2) Ogni retta si estende indefinitamente in ogni verso

A_3) gli angoli retti sono uguali

A_4) Dato raggio r e punto C esiste una sola circonferenza avente C come centro e r raggio

A_5) Data retta r e punto P esiste ed è unica retta s $P \in s$ $s \parallel r$

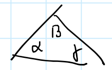


Se $\alpha + \beta < 180°$

TEOREMI: affermazioni sugli oggetti primitivi ottenute per deduzione logica dagli assiomi

Sistema Ipotetico - Deduttivo

Assiomi Teoremi

Esempio Teorema 

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Fasi della dimostrazione:

- Scoperta di un certo risultato
- Dimostrazione

Hilbert 1900 Euclide vagamente

Uso assiomi / economia \ evitare errori

Paradosso di Russell

$I = \{x : P(x)\}$ $a \in I$?

$R = \{x : x \notin x\}$ $R \in R$?

$R \in R$ se e solo se $R \notin R$

Paradosso di Richard

Sia x il minimo intero naturale la cui definizione richiede almeno 100 parole

Ad esempio posso definire $x = 2$ il minimo naturale pari

Teorema di Godel: L'aritmetica è INCOMPLETA

CONTRADDITTORIA

Euclide Definizioni di oggetti primitivi e oggetti composti

Def punto è ciò che non ha parti

Def.1) quadrato poligono 4 lati di uguale lunghezza e con angoli interni di uguale ampiezza

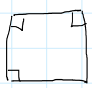
Def.2) Q 4 lati uguali dato da coppie di lati paralleli

$Q \in D_1 \iff Q \in D_2$

Equivalenza 2 definizioni $D_1 = D_2$

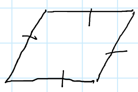
D_1 insieme degli oggetti che soddisfano la prima definizione

In questo caso $D_1 \subseteq D_2$



$D_2 \subseteq D_1$? No $D_2 \nsubseteq D_1$

esiste $R \in D_2$ ma $R \notin D_1$

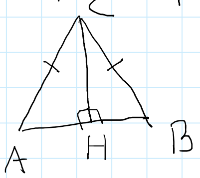


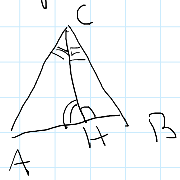
rombo

Esempio Def 1) Un triangolo si dice ISOSCELE se ha 2 lati congruenti

Def 2) Un triangolo si dice equiangolo se ha $\alpha = \beta$ α, β amp. angoli interni

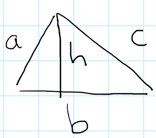
$D_1 = D_2$





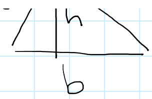
$D_1 \subseteq D_2$ Ex: $D_2 \subseteq D_1$

LLL



T

$A(T) = \frac{bh}{2}$

LLL 

$$A(T) = \frac{bh}{2}$$

Area di T ? si può esprimere come funzione delle lunghezze dei 3 lati

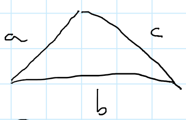
FORMULA di ERONE

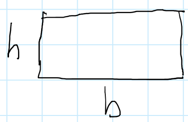
$$A(T) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad s = \frac{a+b+c}{2}$$

$a+b \Rightarrow c$ T diventa segmento sse

$a+b=c \quad s = \frac{a+b+c}{2} = c$

Ex: Mostrare che $s, s-a, \ldots, s-c \geq 0$ e vale $= 0$ solo se T diventa segmento

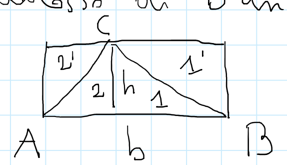




$$A(R) := bh$$

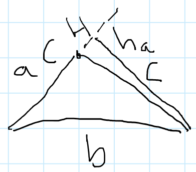
$$A(Q) = A(T_1) + A(T_2)$$

(Paradosso di Banach-Tarski)

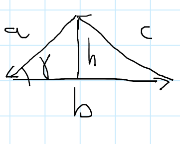


$$A(R) = bh$$
$$= A(1) + A(1') + A(2) + A(2')$$
$$= 2(A(1) + A(2)) = 2A(T)$$

$$A(T) = \frac{bh_b}{2}$$



$$\frac{a h_a}{2} \stackrel{?}{=} \frac{b h_b}{2}$$



$\frac{h}{a} = \sin\gamma \quad h = a\sin\gamma$

$b + c + a = 0 \quad c = -(a+b)$

$|c| \quad c=(u,v) \quad |c|^2 = u^2+v^2 = c\cdot c =$

$-(a+b)\cdot -(a+b) = a\cdot a + \underline{a\cdot b} + \underline{b\cdot a} + b\cdot b$

$= |a|^2 + |b|^2 + 2\, a\cdot b = |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|\cos\gamma$

Ex: Calcolo area parallelogramma