Soluzioni Esami 2016.06.01

1) Il triangolo esiste poiché $a+b \geq c$ ove $\{a,b,c\}$ sono le lunghezze dei 3 lati (in qualche ordine) ma non è rettangolo poiché
$a^2+b^2 \neq c^2$ (l'unico caso interessante è quando $a \leq b \leq c$, Perché?).

2) α è isometria se, posto $X' = \alpha(X)$, $\forall P, Q$ $|PQ| = |P'Q'|$

Se $f(x,y) = (y,-x)$ $|PQ|^2 = (x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2$ ove $P = (x_P, y_P)$ ...

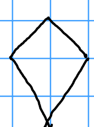
$|P'Q'|^2 = (y_P - y_Q)^2 + (-x_P - (-x_Q))^2 = |PQ|^2$

Se $f(x,y) = (-y,-x)$ il conto è simile

Per stabilire se f è diretta o inversa esistono varie strade

e.g. $f(x,y) = (-y,-x)$ è la composizione di $g(x,y) = (y,x)$ e $h(x,y) = (-x,-y)$

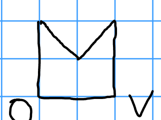
g è la riflessione rispetto alla 1^a bisettrice, h è rotazione di centro $(0,0)$ angolo $180°$, quindi f INVERTE orientazione.

3) No  soddisfa b) ma non a)

Perché basta uno solo dei due esempi?

4) (Difficile) Bisognava determinare i rapporti k delle similitudini

Siccome le aree vanno moltiplicate per k^2 si ha $k = \sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ in a) e b)

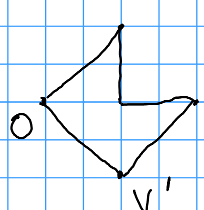


Sia α la similitudine cercata e si indichi con $X' = \alpha(X)$ dove X denota un punto o una figura

Traslando posso pensare che $O' = O$. Allora $|OV'| = \sqrt{2}\,|OV| = 2\sqrt{2}$

La richiesta che V' stia sulla quadrettatura mi dice che le sue coordinate $V' = (a,b)$ soddisfano $a^2 + b^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$ e $a, b \in \mathbb{Z}$

Quindi $a = \pm 2 = b$. Questo suggerisce di considerare rotazioni di $45° + k\,90°$ $k \in \mathbb{Z}$

Infatti  soddisfa le richieste di a)

In b) $k = \sqrt{3}$ quindi $|OV'| = 2\sqrt{3}$ $a^2 + b^2 = 12$ e $a, b \in \mathbb{Z}$. Ma $a^2 \in \{0,1,4,9\}$ e $12 - a^2 \in \{12, 11, 8, 3\}$ non è mai un quadrato perfetto.

5) Sia $k(\sigma)$ il rapporto della similitudine σ

Allora σ è isometria sse $k(\sigma)=1$. Inoltre $k(\sigma\circ\tau)=k(\sigma)k(\tau)$

Ora $k(\omega\circ\alpha\circ\omega^{-1})=k(\omega)k(\alpha)k(\omega^{-1})=k(\omega)k(\alpha)\,k(\omega)^{-1}=k(\alpha)=1$