Sol. Tema 12/07/2016

Ex 1: a) $m = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

b) $r: y = \sqrt{3}\cdot x$ $\quad (0,0) \in r$ $\quad$ Se $(0,0) \neq (a,b) \in r$ con $a, b \in \mathbb{Z}$, avrei $\sqrt{3} = \frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$, ma $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. Altrimenti $b^2 = 3a^2$, ma b^2 contiene 3 come fattore un numero pari di volte, mentre $3a^2$ un numero dispari di volte

Ex 2: Se sospetto che $f(x,y) = (x, x+y)$ non sia una isometria, si dimostra trovando due punti A, B tali che $|A'B'| \neq |AB|$ ove $X' = f(X)$

$A(0,0)$, $B(1,0) \Rightarrow A'(0,0)$, $B'(1,1)$ $\quad |AB| = 1 \neq \sqrt{2} = |A'B'|$

Altrimenti siano A, B arbitrari $A(x_A, y_A)$ $\quad B(x_B, y_B)$ Allora

$$|AB|^2 = (y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2$$
$$|A'B'|^2 = ((y_B - y_A) + (x_B - x_A))^2 + (x_B - x_A)^2$$

Per cui $|AB| = |A'B'|$ sse

$$\left[2(y_B - y_A) + (x_B - x_A)\right](x_B - x_A) = 0$$

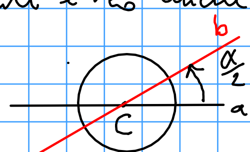
Si intuisce che non tutte le scelte di x_A, x_B, y_A, y_B soddisfano questa condizione, ad esempio $x_A = 0$ $\; x_B = 1$ $\; y_A = y_B = 0$ non la soddisfano

ATTENZIONE: Il fatto che $|AB|^2$ ha una scrittura diversa da $|A'B'|$ non basta per dire che SONO diversi. Ad esempio

$x^2 - y^2$ ha una scrittura diversa da $(x-y)(x+y)$

ma $\forall x, y$ danno lo STESSO valore, cioè sono uguali

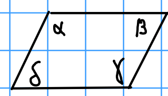
Ex 3: Sia C il centro del cerchio F. Se $\alpha \in \mathcal{G}(F)$, allora $\alpha(C) = C$. Poiché F è limitata α è rotazione e/o riflessione, quindi le rotazioni in $\mathcal{G}(F)$ hanno centro in C e le riflessioni assi passanti per C. Ovviamente è vero anche il viceversa. Quindi $\mathcal{G}(F)$ è DIEDRALE e possiede infiniti elementi



Sia σ la riflessione di asse a e ρ_α la rotazione di centro C e angolo α.

Allora $\rho_\alpha \circ \sigma$ è isometria inversa, quindi una riflessione il cui asse forma un angolo di $\alpha/2$ con a (Perché?). Quindi ogni riflessione in $\mathcal{G}(F)$ ha forma $\rho_\alpha \sigma$ per $0 \le \alpha < 360^\circ$ (Perché?). Per cui esiste una corrispondenza biunivoca tra le rotazioni in $\mathcal{G}(F)$ e le riflessioni in $\mathcal{G}(F)$ $\quad \rho_\alpha \longleftrightarrow \rho_\alpha \circ \sigma$

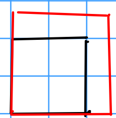
Ex 4: a) Non esiste Triangolo rosso poiché la somma angoli interni = 180°

c) ⇒ b) Basta trovare parallelogramma rosso. Ora ogni parallelogramma che non sia rettangolo è rosso. Infatti  $\alpha = \gamma \quad \beta = \delta \quad \alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$

ossia $\alpha + \beta = 180°$ quindi, se $\alpha > \beta$ allora $\alpha > 90°$ (Perché?)

Ex 5: I due rombi sono CONGRUENTI avendo lati e diagonali di uguale lunghezza

Dire che hanno angoli di egual ampiezza VA Giustificato!!

I due quadrati e i due triangoli sono simili. Infatti posso sempre trovare isometrie (Perché?), tali che  e  e osservare che esistono omotetie (di quale centro) e

rapporto $\sqrt{5}/2$ e $\sqrt{2}$ che portano la figura nera in quella rossa