Matematica Sperimentale: tra l'utile e il dilettevole

ANDREA PREVITALI

Dipartimento di Fisica e Matematica
Università dell'Insubria-Como

http://scienze-como.uninsubria.it/previtali
andrea.previtali@uninsubria.it

Insubria Open Days, 15 e 22 Aprile 2005

π: la costante di Ludolph

Cosa è π?

3.14 è una risposta soddisfacente se voglio dimostrare di aver studiato.

Ha a che fare col cerchio:

Theorem 1. *La circonferenza di un cerchio di raggio r vale $2\pi r$ e la sua area πr^2.*

Quindi posso definire π come il rapporto tra la circonferenza e il diametro di un qualsiasi cerchio.

Quante cifre sono note?

Bibbia	−550	1
Archimede	−250	7
Al Kashi	1429	14
Van Ceulen	1610	35
Dase	1844	200
Shanks	1874	707(527)
Ferguson	1946	620
ENIAC	1949	2307
Genyus	1958	10000
Shanks	1961	100265
Guillod	1973	1001250
Kanada	1982	16777206
Kanada	1987	134217700
Chudnovskys	1989	10^9
Kanada	1997	51×10^9
Kanada	1999	206×10^9

Quante cifre servono?

A cosa serve conoscere tutte queste cifre?

- ☞ ^{2}. Devo dipi
  Archimede mi fa guadagnare 141 euro in piú della Bibbia;

- ☞ Voglio sa
  $1,57 \times 10^8$ Km. Per una tolleranza intorno al chilometro mi servono 9 cifre;

- ☞ è razionale o irrazionale. Mi servono infinite cifre. Voglio sap
  Infatti un numero è razionale se e solo se le sue cifre si ripetono.

Ancora un paio di esempi

- Per calco
  usò un’approssimazione di π con 12 cifre;

- Per rispar

Nel 1994 Nicely stava cercando di determinare la distribuzione dei numeri primi:

Theorem 2 (Hadamard, De la Vallée-Poussin 1896)**.** *I primi inferiori a* x *sono circa* $\frac{x}{\log_e x}$, $e \approx 2.718281828$ *è la costante di Nepero.*

La dimostrazione richiede delicati argomenti di Analisi Complessa.

... cosa c'entra π?

Dopo vari tentativi Nicely otteneva sempre risultati errati.

Il coprocessore dei Pentium I a 130 MHz era difettoso.

L'Intel dovette ritirare tutti i computer venduti e sostituire il coprocessore.

Prima di lanciare nuove componenti sul mercato si fa calcolare al computer qualche milione di cifre di π. Se coincidono con quelle note, si hanno elevate probabilità che le componenti funzionano bene.

Come si calcola π?

Il metodo di Buffon: la probabilità che un ago di lunghezza 1 gettato nel piano intersechi le rette $y = k$, k un intero, vale $\frac{2}{\pi}$.

La probabilità che due interi scelti a caso abbiano massimo comune divisore uguale a 1 vale $\frac{6}{\pi^2} \approx 0.6079$.

Proviamo un Esperimento con Maple. Maple è uno degli ausili che l'informatica ha fornito ai Matematici (e non solo a loro).

La serie di Gregory-Leibnitz

Siccome

$$(1+x^2)(1-x^2+x^4-x^6+\ldots(-1)^k x^{2k}) = 1+(-1)^{k+1}x^{2k+2} \approx 1$$

si ha

$$\frac{\pi}{4} = [\arctan(y)]_0^1 = \int_0^1 (1-x^2+x^4-x^6+\ldots)dx = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\ldots.$$

Vediamo con Maple che le convergenza risulta lenta. Per avere 1 cifra decimale esatta servono 10 termini. Piú in generale per k cifre servono 10^k termini. Si parla di convergenza lenta.

Approssimazioni piú veloci

Vogliamo mostrare la seguente identità:

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i} \left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6} \right),$$

dove ∞ significa che piú termini sommiamo piú ci avviciniamo a π (senza mai raggiungerlo).

La dimostrazione formale:

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^{k-1}}{1-x^8} dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sum_{i=0}^{\infty} x^{k-1+8i} dx = \frac{1}{\sqrt{2^k}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i (8i+k)}.$$

Per cui

$$c\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{16^i}\left(\frac{4}{8i+1}-\frac{2}{8i+4}-\frac{1}{8i+5}-\frac{1}{8i+6}\right)=$$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{4\sqrt{2}-8x^3-4\sqrt{2}x^4-8x^5}{1-x^8}dx,$$

e sostituendo $y=\sqrt{2}x$

$$\int_0^1\frac{16y-16}{y^4-2y^3+4y-4}dy=\int_0^1\frac{4y}{y^2-2}dy-\int_0^1\frac{4y-8}{y^2-2y+2}dy=\pi.$$

Magia o altro ...?

Littlewood, un matematico inglese del secolo scorso, sosteneva che controllare le dimostrazioni è noioso e spesso inutile.

Come si ottiene una dimostrazione come quella data prima?

Ci vuole intuizione ed esperienza.

Certo che se ci fosse un metodo generale ....

π e le frazioni

π è una frazione?

Lambert ha dimostrato che π è irrazionale (non una frazione) nel 1770.

Anche $\sqrt{2}$ è irrazionale. Forse π si può esprimere come una radice quadrata.

Nemmeno questo è vero, infatti π è trascendente, ossia non è radice di un polinomio a coefficienti interi (Lindemann 1882).

Mentre $\sqrt{2}$ è radice di $x^2 - 2$.

Buone approssimazioni

Come calcolare buone approssimazioni di π mediante frazioni.

Beh, se amo le potenze di 10 ecco alcune approssimazioni:

$$3, \frac{31}{10}, \frac{314}{100}, \frac{3141}{1000}, \ldots$$

Archimede (circa 300 a. c.) ci insegna che si può fare di meglio

$$3, \frac{22}{7} \approx 3.14, \frac{355}{113} \approx 3.141592$$

con denominatore a tre cifre ne ottengo SEI esatte.

Non è Magia, ma rimane misterioso

Il Matematico e Scultore Helaman Ferguson ha scoperto nel 1994 l'algoritmo PSLQ. Questo programma consente di trovare relazioni tra numeri reali. Ad esempio trovare una frazione $\frac{a}{b}$ che approssima π significa che $\pi \approx \frac{a}{b}$, ossia $b\pi - a \cdot 1 \approx 0$. Cioè significa trovare due interi buoni a, b a partire dai due numeri reali π e 1.

Introduco $f(k) = \sum_{i=0}^{100} \frac{1}{16^i(8*i+k)}$, $k = 1, \ldots, 8$ e chiedo a PSLQ di trovare degli interi $a, b, \ldots, c$ tali che $\pi \approx af(1) + bf(2) + \cdots + cf(8)$.

Il miracolo è che ottengo un'ugaglianza e non solo un'approssimazione.

Cifre esadecimali di π

Il vantaggio di questo algoritmo è che consente di determinare cifre in posizione arbitraria (ad esempio la miliardesima) senza conoscere le precedenti.

Per l'esattezza mi fornisce le cifre in base 16 o esadecimali.