

# Computer e Teoremi in Geometria

Andrea Previtali

[andrea.previtali@uninsubria.it](mailto:andrea.previtali@uninsubria.it)

<http://scienze-como.uninsubria.it/previtali>

Dipartimento di Fisica e Matematica  
Università dell'Insubria-Como

Menaggio, 10 Febbraio 2011

# 1 Introduzione

## Geometria Euclidea

La Geometria nel piano studia le relazioni tra vari oggetti

- Punti;
- Rette;
- Poligoni (regolari e non);
- Cerchi.

Quali proprietà descrivono questi oggetti e le relazioni tra di loro?

La Geometria nel piano studia le relazioni tra vari oggetti

- Punti;
- Rette;
- Poligoni (regolari e non);
- Cerchi.

Quali proprietà descrivono questi oggetti e le relazioni tra di loro?

La Geometria nel piano studia le relazioni tra vari oggetti

- Punti;
- Rette;
- Poligoni (regolari e non);
- Cerchi.

Quali proprietà descrivono questi oggetti e le relazioni tra di loro?

La Geometria nel piano studia le relazioni tra vari oggetti

- Punti;
- Rette;
- Poligoni (regolari e non);
- Cerchi.

Quali proprietà descrivono questi oggetti e le relazioni tra di loro?

# Assiomi di Euclide

Motivati da questioni pratiche (ritracciare i campi dopo le inondazioni del Nilo) i greci si occuparono degli oggetti prima menzionati.

Euclide enunciò 5 proprietà intuitive ed elementari (quasi) da essi soddisfatte

- Ogni coppia di punti distinti è congiunta da una e una sola retta;
- Ogni retta è estendibile indefinitamente in entrambe le direzioni;
- È sempre possibile tracciare un cerchio di dato centro e raggio;
- Gli angoli retti sono tutti uguali tra loro;
- Se due rette intersecate con una terza retta formano angoli la cui somma è inferiore a due retti, allora tali rette si incontrano in un punto.

# Assiomi di Euclide

Motivati da questioni pratiche (ritracciare i campi dopo le inondazioni del Nilo) i greci si occuparono degli oggetti prima menzionati.

Euclide enunciò 5 proprietà intuitive ed elementari (quasi) da essi soddisfatte

- Ogni coppia di punti distinti è congiunta da una e una sola retta;
- Ogni retta è estendibile indefinitamente in entrambe le direzioni;
- È sempre possibile tracciare un cerchio di dato centro e raggio;
- Gli angoli retti sono tutti uguali tra loro;
- Se due rette intersecate con una terza retta formano angoli la cui somma è inferiore a due retti, allora tali rette si incontrano in un punto.

# Assiomi di Euclide

Motivati da questioni pratiche (ritracciare i campi dopo le inondazioni del Nilo) i greci si occuparono degli oggetti prima menzionati.

Euclide enunciò 5 proprietà intuitive ed elementari (quasi) da essi soddisfatte

- Ogni coppia di punti distinti è congiunta da una e una sola retta;
- Ogni retta è estendibile indefinitamente in entrambe le direzioni;
- È sempre possibile tracciare un cerchio di dato centro e raggio;
- Gli angoli retti sono tutti uguali tra loro;
- Se due rette intersecate con una terza retta formano angoli la cui somma è inferiore a due retti, allora tali rette si incontrano in un punto.

# Assiomi di Euclide

Motivati da questioni pratiche (ritracciare i campi dopo le inondazioni del Nilo) i greci si occuparono degli oggetti prima menzionati.

Euclide enunciò 5 proprietà intuitive ed elementari (quasi) da essi soddisfatte

- Ogni coppia di punti distinti è congiunta da una e una sola retta;
- Ogni retta è estendibile indefinitamente in entrambe le direzioni;
- È sempre possibile tracciare un cerchio di dato centro e raggio;
- Gli angoli retti sono tutti uguali tra loro;
- Se due rette intersecate con una terza retta formano angoli la cui somma è inferiore a due retti, allora tali rette si incontrano in un punto.

# Assiomi di Euclide

Motivati da questioni pratiche (ritracciare i campi dopo le inondazioni del Nilo) i greci si occuparono degli oggetti prima menzionati.

Euclide enunciò 5 proprietà intuitive ed elementari (quasi) da essi soddisfatte

- Ogni coppia di punti distinti è congiunta da una e una sola retta;
- Ogni retta è estendibile indefinitamente in entrambe le direzioni;
- È sempre possibile tracciare un cerchio di dato centro e raggio;
- Gli angoli retti sono tutti uguali tra loro;
- Se due rette intersecate con una terza retta formano angoli la cui somma è inferiore a due retti, allora tali rette si incontrano in un punto.

# Teoremi e Verità

- Teorema è una qualsiasi deduzione logica dagli assiomi
- Verità è una qualsiasi affermazione che risulta soddisfatta nella teoria;
- Un Teorema esprime sempre un fatto vero.

# Teoremi e Verità

- Teorema è una qualsiasi deduzione logica dagli assiomi
- Verità è una qualsiasi affermazione che risulta soddisfatta nella teoria;
- Un Teorema esprime sempre un fatto vero.

# Teoremi e Verità

- Teorema è una qualsiasi deduzione logica dagli assiomi
- Verità è una qualsiasi affermazione che risulta soddisfatta nella teoria;
- Un Teorema esprime sempre un fatto vero.

# Esempi di Teoremi

- Ogni Triangolo ha somma degli angoli interni pari a due retti;
- Un Triangolo è equilatero se e solo se è equiangolo;
- Teorema di Pitagora;
- Le altezze di un triangolo si incontrano in un punto.

# Esempi di Teoremi

- Ogni Triangolo ha somma degli angoli interni pari a due retti;
- Un Triangolo è equilatero se e solo se è equiangolo;
- Teorema di Pitagora;
- Le altezze di un triangolo si incontrano in un punto.

# Esempi di Teoremi

- Ogni Triangolo ha somma degli angoli interni pari a due retti;
- Un Triangolo è equilatero se e solo se è equiangolo;
- Teorema di Pitagora;
- Le altezze di un triangolo si incontrano in un punto.

# Esempi di Teoremi

- Ogni Triangolo ha somma degli angoli interni pari a due retti;
- Un Triangolo è equilatero se e solo se è equiangolo;
- Teorema di Pitagora;
- Le altezze di un triangolo si incontrano in un punto.

## Come si dimostrano i Teoremi?

- Usando fantasia e intuito, metodo riservato a pochi genii;
- Convertendo il Teorema in un sistema di equazioni e risolvendolo.

## Come si dimostrano i Teoremi?

- Usando fantasia e intuito, metodo riservato a pochi genii;
- Convertendo il Teorema in un sistema di equazioni e risolvendolo.

- Per la conversione si identifica il piano con  $\mathbb{R}^2$ , le coppie di numeri reali;
- I punti diventano coppie  $P \leftrightarrow (a, b)$ ;
- Rette e Cerchi diventano i luoghi dei punti che soddisfano un'opportuna equazione;
- Rette  $r : ax + by + c = 0$ ;
- Cerchi  $C : x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ .

- Per la conversione si identifica il piano con  $\mathbb{R}^2$ , le coppie di numeri reali;
- I punti diventano coppie  $P \leftrightarrow (a, b)$ ;
- Rette e Cerchi diventano i luoghi dei punti che soddisfano un'opportuna equazione;
- Rette  $r : ax + by + c = 0$ ;
- Cerchi  $C : x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ .

- Per la conversione si identifica il piano con  $\mathbb{R}^2$ , le coppie di numeri reali;
- I punti diventano coppie  $P \leftrightarrow (a, b)$ ;
- Rette e Cerchi diventano i luoghi dei punti che soddisfano un'opportuna equazione;
- Rette  $r : ax + by + c = 0$ ;
- Cerchi  $C : x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ .

- Per la conversione si identifica il piano con  $\mathbb{R}^2$ , le coppie di numeri reali;
- I punti diventano coppie  $P \leftrightarrow (a, b)$ ;
- Rette e Cerchi diventano i luoghi dei punti che soddisfano un'opportuna equazione;
- Rette  $r : ax + by + c = 0$ ;
- Cerchi  $C : x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ .

- Per la conversione si identifica il piano con  $\mathbb{R}^2$ , le coppie di numeri reali;
- I punti diventano coppie  $P \leftrightarrow (a, b)$ ;
- Rette e Cerchi diventano i luoghi dei punti che soddisfano un'opportuna equazione;
- Rette  $r : ax + by + c = 0$ ;
- Cerchi  $C : x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ .

- **Problema: Determinare  $r \cap C$ ,  $r : x - y + 1 = 0$ ,  $C : x^2 + y^2 - 1 = 0$ ;**
- Sistema due equazioni in due incognite;
- Si elimina un'incognita  $y = x + 1$ ;
- Si ottiene una equazione di secondo grado  $x^2 + (x + 1)^2 - 1 = 0$ ;
- Si risolve  $x = 0, -1$  e si calcola la corrispondente  $y = x + 1$ .

- **Problema: Determinare  $r \cap C$ ,  $r : x - y + 1 = 0$ ,  $C : x^2 + y^2 - 1 = 0$ ;**
- **Sistema due equazioni in due incognite;**
- Si elimina un'incognita  $y = x + 1$ ;
- Si ottiene una equazione di secondo grado  $x^2 + (x + 1)^2 - 1 = 0$ ;
- Si risolve  $x = 0, -1$  e si calcola la corrispondente  $y = x + 1$ .

# Risolvere Equazioni

- Problema: Determinare  $r \cap C$ ,  $r : x - y + 1 = 0$ ,  
 $C : x^2 + y^2 - 1 = 0$ ;
- Sistema due equazioni in due incognite;
- Si elimina un'incognita  $y = x + 1$ ;
- Si ottiene una equazione di secondo grado  
 $x^2 + (x + 1)^2 - 1 = 0$ ;
- Si risolve  $x = 0, -1$  e si calcola la corrispondente  
 $y = x + 1$ .

# Risolvere Equazioni

- Problema: Determinare  $r \cap C$ ,  $r : x - y + 1 = 0$ ,  
 $C : x^2 + y^2 - 1 = 0$ ;
- Sistema due equazioni in due incognite;
- Si elimina un'incognita  $y = x + 1$ ;
- Si ottiene una equazione di secondo grado  
 $x^2 + (x + 1)^2 - 1 = 0$ ;
- Si risolve  $x = 0, -1$  e si calcola la corrispondente  
 $y = x + 1$ .

# Risolvere Equazioni

- Problema: Determinare  $r \cap C$ ,  $r : x - y + 1 = 0$ ,  
 $C : x^2 + y^2 - 1 = 0$ ;
- Sistema due equazioni in due incognite;
- Si elimina un'incognita  $y = x + 1$ ;
- Si ottiene una equazione di secondo grado  
 $x^2 + (x + 1)^2 - 1 = 0$ ;
- Si risolve  $x = 0, -1$  e si calcola la corrispondente  
 $y = x + 1$ .

# Siamo sempre così Fortunati?

Maple

Previtali

Introduzione  
Geometria Euclidea

- No,  $r$  e  $C$  potrebbero non intersecarsi;
- Trovate il minimo  $a \in \mathbb{R}_{>0}$  tale che  $r : x - y + a = 0$  e  $C$  non hanno punti in comune;
- $a = \sqrt{2}$ .
- Oltre ho intersezioni ma sui numeri complessi  $\mathbb{C} = \{a + ib\}$ , ove  $i^2 = -1$ , l'unità immaginaria.

# Siamo sempre così Fortunati?

Maple

Previtali

Introduzione

Geometria Euclidea

- No,  $r$  e  $C$  potrebbero non intersecarsi;
- Trovate il minimo  $a \in \mathbb{R}_{>0}$  tale che  $r : x - y + a = 0$  e  $C$  non hanno punti in comune;
- $a = \sqrt{2}$ .
- Oltre ho intersezioni ma sui numeri complessi  $\mathbb{C} = \{a + ib\}$ , ove  $i^2 = -1$ , l'unità immaginaria.

# Siamo sempre così Fortunati?

Maple

Previtali

Introduzione

Geometria Euclidea

- No,  $r$  e  $C$  potrebbero non intersecarsi;
- Trovate il minimo  $a \in \mathbb{R}_{>0}$  tale che  $r : x - y + a = 0$  e  $C$  non hanno punti in comune;
- $a = \sqrt{2}$ .
- Oltre ho intersezioni ma sui numeri complessi  $\mathbb{C} = \{a + ib\}$ , ove  $i^2 = -1$ , l'unità immaginaria.

# Siamo sempre così Fortunati?

Maple

Previtali

Introduzione

Geometria Euclidea

- No,  $r$  e  $C$  potrebbero non intersecarsi;
- Trovate il minimo  $a \in \mathbb{R}_{>0}$  tale che  $r : x - y + a = 0$  e  $C$  non hanno punti in comune;
- $a = \sqrt{2}$ .
- Oltre ho intersezioni ma sui numeri complessi  $\mathbb{C} = \{a + ib\}$ , ove  $i^2 = -1$ , l'unità immaginaria.

- Riesco sempre a risolvere queste equazioni (su  $\mathbb{C}$ )?
- Potrei avere equazioni di grado sempre più elevato;
- Per trovare le intersezioni tra due cerchi devo risolvere equazioni di grado 4;

- Riesco sempre a risolvere queste equazioni (su  $\mathbb{C}$ )?
- Potrei avere equazioni di grado sempre più elevato;
- Per trovare le intersezioni tra due cerchi devo risolvere equazioni di grado 4;

- Riesco sempre a risolvere queste equazioni (su  $\mathbb{C}$ )?
- Potrei avere equazioni di grado sempre più elevato;
- Per trovare le intersezioni tra due cerchi devo risolvere equazioni di grado 4;

# Polinomi e Gradi

- Un polinomio in due variabili è un'espressione della forma  $2x^3y - 3xy - 1$
- Il grado di totale di un monomio è la somma dei gradi delle sue variabili;
- $x^3y$  ha grado 3 in  $x$ , 1 in  $y$  e grado totale  $4 = 3 + 1$ ;
- Il grado (totale) di un polinomio è il massimo dei gradi totali dei suoi monomi;
- $2x^3y - 3xy - 1$  ha grado totale 4.

# Polinomi e Gradi

- Un polinomio in due variabili è un'espressione della forma  $2x^3y - 3xy - 1$
- Il grado di totale di un monomio è la somma dei gradi delle sue variabili;
- $x^3y$  ha grado 3 in  $x$ , 1 in  $y$  e grado totale  $4 = 3 + 1$ ;
- Il grado (totale) di un polinomio è il massimo dei gradi totali dei suoi monomi;
- $2x^3y - 3xy - 1$  ha grado totale 4.

# Polinomi e Gradi

- Un polinomio in due variabili è un'espressione della forma  $2x^3y - 3xy - 1$
- Il grado di totale di un monomio è la somma dei gradi delle sue variabili;
- $x^3y$  ha grado 3 in  $x$ , 1 in  $y$  e grado totale  $4 = 3 + 1$ ;
- Il grado (totale) di un polinomio è il massimo dei gradi totali dei suoi monomi;
- $2x^3y - 3xy - 1$  ha grado totale 4.

# Polinomi e Gradi

- Un polinomio in due variabili è un'espressione della forma  $2x^3y - 3xy - 1$
- Il grado di totale di un monomio è la somma dei gradi delle sue variabili;
- $x^3y$  ha grado 3 in  $x$ , 1 in  $y$  e grado totale  $4 = 3 + 1$ ;
- Il grado (totale) di un polinomio è il massimo dei gradi totali dei suoi monomi;
- $2x^3y - 3xy - 1$  ha grado totale 4.

# Polinomi e Gradi

- Un polinomio in due variabili è un'espressione della forma  $2x^3y - 3xy - 1$
- Il grado di totale di un monomio è la somma dei gradi delle sue variabili;
- $x^3y$  ha grado 3 in  $x$ , 1 in  $y$  e grado totale  $4 = 3 + 1$ ;
- Il grado (totale) di un polinomio è il massimo dei gradi totali dei suoi monomi;
- $2x^3y - 3xy - 1$  ha grado totale 4.

# Teorema di Bézout

- Sia  $A$  il luogo dei punti che annullano un polinomio di grado  $a$ ;
- Sia  $B$  il luogo dei punti che annullano un polinomio di grado  $b$ ;
- Allora  $A \cap B$  è un insieme con  $ab$  punti;
- Per una retta  $A$ ,  $a = 1$ , per un cerchio  $B$ ,  $b = 2$ . Infatti  $|A \cap B| = 2$ .

# Teorema di Bézout

- Sia  $A$  il luogo dei punti che annullano un polinomio di grado  $a$ ;
- Sia  $B$  il luogo dei punti che annullano un polinomio di grado  $b$ ;
- Allora  $A \cap B$  è un insieme con  $ab$  punti;
- Per una retta  $A$ ,  $a = 1$ , per un cerchio  $B$ ,  $b = 2$ . Infatti  $|A \cap B| = 2$ .

# Teorema di Bézout

- Sia  $A$  il luogo dei punti che annullano un polinomio di grado  $a$ ;
- Sia  $B$  il luogo dei punti che annullano un polinomio di grado  $b$ ;
- Allora  $A \cap B$  è un insieme con  $ab$  punti;
- Per una retta  $A$ ,  $a = 1$ , per un cerchio  $B$ ,  $b = 2$ . Infatti  $|A \cap B| = 2$ .

# Teorema di Bézout

- Sia  $A$  il luogo dei punti che annullano un polinomio di grado  $a$ ;
- Sia  $B$  il luogo dei punti che annullano un polinomio di grado  $b$ ;
- Allora  $A \cap B$  è un insieme con  $ab$  punti;
- Per una retta  $A$ ,  $a = 1$ , per un cerchio  $B$ ,  $b = 2$ . Infatti  $|A \cap B| = 2$ .

- Un'equazione in due variabili si dice lineare le variabili compaiono con grado totale al massimo 1;
- $2x - 3y + 2 = 0$  è un'equazione lineare;
- Un sistema lineare è una collezione di equazioni lineari che devono essere soddisfatte contemporaneamente;

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2x - 3y + 4 = 0 \end{cases}$$

- Un'equazione in due variabili si dice lineare le variabili compaiono con grado totale al massimo 1;
- $2x - 3y + 2 = 0$  è un'equazione lineare;
- Un sistema lineare è una collezione di equazioni lineari che devono essere soddisfatte contemporaneamente;

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2x - 3y + 4 = 0 \end{cases}$$

- Un'equazione in due variabili si dice lineare le variabili compaiono con grado totale al massimo 1;
- $2x - 3y + 2 = 0$  è un'equazione lineare;
- Un sistema lineare è una collezione di equazioni lineari che devono essere soddisfatte contemporaneamente;

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2x - 3y + 4 = 0 \end{cases}$$

- Un'equazione in due variabili si dice lineare le variabili compaiono con grado totale al massimo 1;
- $2x - 3y + 2 = 0$  è un'equazione lineare;
- Un sistema lineare è una collezione di equazioni lineari che devono essere soddisfatte contemporaneamente;

- $$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2x - 3y + 4 = 0 \end{cases}$$

- Per i sistemi lineari si può stabilire se ammettono soluzioni;
- In tal caso esistono algoritmi, procedure di calcolo, che mi forniscono le soluzioni;
- Un tal procedimento si chiama regola di Cramer (fine 1700)

- Per i sistemi lineari si può stabilire se ammettono soluzioni;
- In tal caso esistono algoritmi, procedure di calcolo, che mi forniscono le soluzioni;
- Un tal procedimento si chiama regola di Cramer (fine 1700)

- Per i sistemi lineari si può stabilire se ammettono soluzioni;
- In tal caso esistono algoritmi, procedure di calcolo, che mi forniscono le soluzioni;
- Un tal procedimento si chiama regola di Cramer (fine 1700)

# Sistemi Non lineari

- Tali algoritmi sono noti anche per sistemi non lineari, ossia di grado maggiore a 1;
- Sono più complicati;
- Sono noti solo da 20/30 anni;
- Richiedono spesso il supporto di un computer e di programmi specifici.

# Sistemi Non lineari

- Tali algoritmi sono noti anche per sistemi non lineari, ossia di grado maggiore a 1;
- Sono più complicati;
- Sono noti solo da 20/30 anni;
- Richiedono spesso il supporto di un computer e di programmi specifici.

# Sistemi Non lineari

- Tali algoritmi sono noti anche per sistemi non lineari, ossia di grado maggiore a 1;
- Sono più complicati;
- Sono noti solo da 20/30 anni;
- Richiedono spesso il supporto di un computer e di programmi specifici.

# Sistemi Non lineari

- Tali algoritmi sono noti anche per sistemi non lineari, ossia di grado maggiore a 1;
- Sono più complicati;
- Sono noti solo da 20/30 anni;
- Richiedono spesso il supporto di un computer e di programmi specifici.

- Esistono vari programmi per la manipolazione simbolica;
  - Maple;
  - Mathematica;
  - Derive;
  - GAP;
  - MAGMA;

- Esistono vari programmi per la manipolazione simbolica;
- Maple;
- Mathematica;
- Derive;
- GAP;
- MAGMA;

- Esistono vari programmi per la manipolazione simbolica;
- Maple;
- Mathematica;
- Derive;
- GAP;
- MAGMA;

- Esistono vari programmi per la manipolazione simbolica;
- Maple;
- Mathematica;
- Derive;
- GAP;
- MAGMA;

- Esistono vari programmi per la manipolazione simbolica;
- Maple;
- Mathematica;
- Derive;
- GAP;
- MAGMA;

- Esistono vari programmi per la manipolazione simbolica;
- Maple;
- Mathematica;
- Derive;
- GAP;
- MAGMA;

- **Mostrerò alcuni esempi di Teoremi in Geometria Piana;**
- Coinvolgono (solo) rette, cerchi e poligoni;
- Determinazioni di incidenze e valutazione di aree.

- Mostrerò alcuni esempi di Teoremi in Geometria Piana;
- Coinvolgono (solo) rette, cerchi e poligoni;
- Determinazioni di incidenze e valutazione di aree.

- Mostrerò alcuni esempi di Teoremi in Geometria Piana;
- Coinvolgono (solo) rette, cerchi e poligoni;
- Determinazioni di incidenze e valutazione di aree.

# Definizioni in René

Un Matematico Americano, Doron Zeilberger, ha scritto un programma con Maple che dimostra molti teoremi di Geometria. Vanno implementate prima alcune costruzioni elementari:

- Retta per due punti dati;
- retta parallela ad una data passante per un punto;
- retta perpendicolare a una retta data passante per un punto;
- .....

# Definizioni in René

Un Matematico Americano, Doron Zeilberger, ha scritto un programma con Maple che dimostra molti teoremi di Geometria. Vanno implementate prima alcune costruzioni elementari:

- Retta per due punti dati;
- retta parallela ad una data passante per un punto;
- retta perpendicolare a una retta data passante per un punto;
- .....

# Definizioni in René

Un Matematico Americano, Doron Zeilberger, ha scritto un programma con Maple che dimostra molti teoremi di Geometria. Vanno implementate prima alcune costruzioni elementari:

- Retta per due punti dati;
- retta parallela ad una data passante per un punto;
- retta perpendicolare a una retta data passante per un punto;
- .....

# Definizioni in René

Un Matematico Americano, Doron Zeilberger, ha scritto un programma con Maple che dimostra molti teoremi di Geometria. Vanno implementate prima alcune costruzioni elementari:

- Retta per due punti dati;
- retta parallela ad una data passante per un punto;
- retta perpendicolare a una retta data passante per un punto;
- .....

- **Esiste ortocentro (intersezione altezze);**
- Esiste baricentro (intersezione mediane);
- Esiste circocentro (centro cerchio circoscritto);
- Esiste Retta di Eulero.

# Teoremi noti in Maple

- Esiste ortocentro (intersezione altezze);
- Esiste baricentro (intersezione mediane);
- Esiste circocentro (centro cerchio circoscritto);
- Esiste Retta di Eulero.

# Teoremi noti in Maple

- Esiste ortocentro (intersezione altezze);
- Esiste baricentro (intersezione mediane);
- Esiste circocentro (centro cerchio circoscritto);
- Esiste Retta di Eulero.

- Esiste ortocentro (intersezione altezze);
- Esiste baricentro (intersezione mediane);
- Esiste circocentro (centro cerchio circoscritto);
- Esiste Retta di Eulero.

- Teorema di Napoleone;
- Teorema di Desargues;
- Teorema di Morley.

- Teorema di Napoleone;
- Teorema di Desargues;
- Teorema di Morley.

- Teorema di Napoleone;
- Teorema di Desargues;
- Teorema di Morley.

- Si occupa di studiare proprietà che si preservano proiettando;
- Bisogna aggiungere i punti all'infinito;
- Rette parallele si incontrano all'infinito.

- Si occupa di studiare proprietà che si preservano proiettando;
- Bisogna aggiungere i punti all'infinito;
- Rette parallele si incontrano all'infinito.

- Si occupa di studiare proprietà che si preservano proiettando;
- Bisogna aggiungere i punti all'infinito;
- Rette parallele si incontrano all'infinito.

# Principio di Dualità

- **Due Teoremi al prezzo di uno;**
- Basta scambiare tra loro le parole rette e piani;
- Per due rette passa un solo punto diventa per due punti passa una sola retta;
- i cerchi restano cerchi.

# Principio di Dualità

- Due Teoremi al prezzo di uno;
- Basta scambiare tra loro le parole rette e piani;
- Per due rette passa un solo punto diventa per due punti passa una sola retta;
- i cerchi restano cerchi.

# Principio di Dualità

- Due Teoremi al prezzo di uno;
- Basta scambiare tra loro le parole rette e piani;
- Per due rette passa un solo punto diventa per due punti passa una sola retta;
- i cerchi restano cerchi.

# Principio di Dualità

- Due Teoremi al prezzo di uno;
- Basta scambiare tra loro le parole rette e piani;
- Per due rette passa un solo punto diventa per due punti passa una sola retta;
- i cerchi restano cerchi.

# Pascal e Brianchon

- **Teorema di Pascal 1639:**
  - I lati opposti di un esagono inscritto ad un cerchio si intersecano in tre punti allineati;
  - Teorema di Brianchon 1810:
  - Le diagonali di un esagono circoscritto ad un cerchio si intersecano in un punto.

# Pascal e Brianchon

- Teorema di Pascal 1639:
- I lati opposti di un esagono iscritto ad un cerchio si intersecano in tre punti allineati;
- Teorema di Brianchon 1810:
- Le diagonali di un esagono circoscritto ad un cerchio si intersecano in un punto.

# Pascal e Brianchon

- Teorema di Pascal 1639:
- I lati opposti di un esagono iscritto ad un cerchio si intersecano in tre punti allineati;
- Teorema di Brianchon 1810:
- Le diagonali di un esagono circoscritto ad un cerchio si intersecano in un punto.

# Pascal e Brianchon

- Teorema di Pascal 1639:
- I lati opposti di un esagono iscritto ad un cerchio si intersecano in tre punti allineati;
- Teorema di Brianchon 1810:
- Le diagonali di un esagono circoscritto ad un cerchio si intersecano in un punto.

- H.M.S Coxeter, Un'introduzione alla Geometria.
- M. Kline, Storia del Pensiero Matematico Vol. 1 e 2, Einaudi 1999.
- D. Zeilberger, <http://www.rutgers.edu/~zeil>

- H.M.S Coxeter, Un'introduzione alla Geometria.
- M. Kline, Storia del Pensiero Matematico Vol. 1 e 2, Einaudi 1999.
- D. Zeilberger, <http://www.rutgers.edu/~zeil>

- H.M.S Coxeter, Un'introduzione alla Geometria.
- M. Kline, Storia del Pensiero Matematico Vol. 1 e 2, Einaudi 1999.
- D. Zeilberger, <http://www.rutgers.edu/~zeil>