

Metodo Assiomatico in Geometria

Andrea Previtali
andrea.previtali@uninsubria.it

Dipartimento di Fisica e Matematica
Università dell'Insubria-Como

Saronno, 20 Gennaio 2011

1 Introduzione

Intuizione vs Assiomi

Assiomi

La Matematica studia (tra altre cose)

- Insiemi;
- Interi;
- Punti, Rette, Piani.

La Matematica studia (tra altre cose)

- Insiemi;
- Interi;
- Punti, Rette, Piani.

La Matematica studia (tra altre cose)

- Insiemi;
- Interi;
- Punti, Rette, Piani.

Ognuno di questi oggetti rientra rispettivamente nelle seguenti discipline:

- Insiemistica;
- Aritmetica;
- Geometria.

Ognuno di questi oggetti rientra rispettivamente nelle seguenti discipline:

- Insiemistica;
- Aritmetica;
- Geometria.

Ognuno di questi oggetti rientra rispettivamente nelle seguenti discipline:

- Insiemistica;
- Aritmetica;
- Geometria.

- **Vaga percezione degli oggetti che devo studiare;**
- Spesso è sufficiente per coglierne gli aspetti essenziali;
- A volte è necessario essere più precisi.

- Vaga percezione degli oggetti che devo studiare;
- Spesso è sufficiente per coglierne gli aspetti essenziali;
- A volte è necessario essere più precisi.

- Vaga percezione degli oggetti che devo studiare;
- Spesso è sufficiente per coglierne gli aspetti essenziali;
- A volte è necessario essere più precisi.

- Un insieme è;
- Un contenitore per oggetti simili;
- $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$;
- $\{x : P(x)\}$ raccoglie tutti gli oggetti che soddisfano la proprietà P ;
- $A = \{x : x \text{ intero, } x < 6\}$.

- Un insieme è;
- Un contenitore per oggetti simili;
- $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$;
- $\{x : P(x)\}$ raccoglie tutti gli oggetti che soddisfano la proprietà P ;
- $A = \{x : x \text{ intero, } x < 6\}$.

- Un insieme è;
- Un contenitore per oggetti simili;
- $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$;
- $\{x : P(x)\}$ raccoglie tutti gli oggetti che soddisfano la proprietà P ;
- $A = \{x : x \text{ intero, } x < 6\}$.

- Un insieme è;
- Un contenitore per oggetti simili;
- $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$;
- $\{x : P(x)\}$ raccoglie tutti gli oggetti che soddisfano la proprietà P ;
- $A = \{x : x \text{ intero, } x < 6\}$.

- Un insieme è;
- Un contenitore per oggetti simili;
- $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$;
- $\{x : P(x)\}$ raccoglie tutti gli oggetti che soddisfano la proprietà P ;
- $A = \{x : x \text{ intero, } x < 6\}$.

- **Simbolo di appartenenza $1 \in A$;**
- Alcuni insiemi appartengono a sé stessi, altri no;
- L'insieme delle balene non è una balena;
- L'insieme dei concetti astratti è un concetto astratto;

- Simbolo di appartenenza $1 \in A$;
- Alcuni insiemi appartengono a sé stessi, altri no;
- L'insieme delle balene non è una balena;
- L'insieme dei concetti astratti è un concetto astratto;

- Simbolo di appartenenza $1 \in A$;
- Alcuni insiemi appartengono a sé stessi, altri no;
- L'insieme delle balene non è una balena;
- L'insieme dei concetti astratti è un concetto astratto;

- Simbolo di appartenenza $1 \in A$;
- Alcuni insiemi appartengono a sé stessi, altri no;
- L'insieme delle balene non è una balena;
- L'insieme dei concetti astratti è un concetto astratto;

Bertrand Russell (1872-1970) era un logico-matematico inglese.

- $R := \{x \text{ insieme} : x \notin x\}$;
- Allora $R \in R$ se e solo se $R \notin R$;

Ops, qualcosa non va. La nostra intuizione ci fa credere di capire cosa è un insieme e il concetto di appartenenza. Ma Russell ci dimostra che non è così.

Bertrand Russell (1872-1970) era un logico-matematico inglese.

- $R := \{x \text{ insieme} : x \notin x\}$;
- Allora $R \in R$ se e solo se $R \notin R$;

Ops, qualcosa non va. La nostra intuizione ci fa credere di capire cosa è un insieme e il concetto di appartenenza. Ma Russell ci dimostra che non è così.

- Bisogna essere più precisi e specificare quali proprietà soddisfano gli oggetti che intuitivamente chiamiamo insiemi;
- Tali regole si chiamano assiomi e vanno pensati come le regole di un nuovo gioco che ci stiamo inventando;
- Il gioco deve però simulare al meglio gli oggetti che vogliamo studiare.

- Bisogna essere più precisi e specificare quali proprietà soddisfano gli oggetti che intuitivamente chiamiamo insiemi;
- Tali regole si chiamano assiomi e vanno pensati come le regole di un nuovo gioco che ci stiamo inventando;
- Il gioco deve però simulare al meglio gli oggetti che vogliamo studiare.

- Bisogna essere più precisi e specificare quali proprietà soddisfano gli oggetti che intuitivamente chiamiamo insiemi;
- Tali regole si chiamano assiomi e vanno pensati come le regole di un nuovo gioco che ci stiamo inventando;
- Il gioco deve però simulare al meglio gli oggetti che vogliamo studiare.

- Studiare le proprietà di rette, punti e cerchi nel piano;
- Quali proprietà descrivono questi oggetti e le relazioni tra di loro;

- Studiare le proprietà di rette, punti e cerchi nel piano;
- Quali proprietà descrivono questi oggetti e le relazioni tra di loro;

Assiomi di Euclide

Motivati da questioni pratiche (ritracciare i campi dopo le inondazioni del Nilo) i greci si occuparono degli oggetti prima menzionati.

Euclide enunciò 5 proprietà intuitive ed elementari (quasi) da essi soddisfatte

- Ogni coppia di punti distinti è congiunta da una e una sola retta;
- Ogni retta è estendibile indefinitamente in entrambe le direzioni;
- È sempre possibile tracciare un cerchio di dato centro e raggio;
- Gli angoli retti sono tutti uguali tra loro;
- Se due rette intersecate con una terza retta formano angoli la cui somma è inferiore a due retti, allora tali rette si incontrano in un punto.

Motivati da questioni pratiche (ritracciare i campi dopo le inondazioni del Nilo) i greci si occuparono degli oggetti prima menzionati.

Euclide enunciò 5 proprietà intuitive ed elementari (quasi) da essi soddisfatte

- Ogni coppia di punti distinti è congiunta da una e una sola retta;
- Ogni retta è estendibile indefinitamente in entrambe le direzioni;
- È sempre possibile tracciare un cerchio di dato centro e raggio;
- Gli angoli retti sono tutti uguali tra loro;
- Se due rette intersecate con una terza retta formano angoli la cui somma è inferiore a due retti, allora tali rette si incontrano in un punto.

Motivati da questioni pratiche (ritracciare i campi dopo le inondazioni del Nilo) i greci si occuparono degli oggetti prima menzionati.

Euclide enunciò 5 proprietà intuitive ed elementari (quasi) da essi soddisfatte

- Ogni coppia di punti distinti è congiunta da una e una sola retta;
- Ogni retta è estendibile indefinitamente in entrambe le direzioni;
- È sempre possibile tracciare un cerchio di dato centro e raggio;
- Gli angoli retti sono tutti uguali tra loro;
- Se due rette intersecate con una terza retta formano angoli la cui somma è inferiore a due retti, allora tali rette si incontrano in un punto.

Motivati da questioni pratiche (ritracciare i campi dopo le inondazioni del Nilo) i greci si occuparono degli oggetti prima menzionati.

Euclide enunciò 5 proprietà intuitive ed elementari (quasi) da essi soddisfatte

- Ogni coppia di punti distinti è congiunta da una e una sola retta;
- Ogni retta è estendibile indefinitamente in entrambe le direzioni;
- È sempre possibile tracciare un cerchio di dato centro e raggio;
- Gli angoli retti sono tutti uguali tra loro;
- Se due rette intersecate con una terza retta formano angoli la cui somma è inferiore a due retti, allora tali rette si incontrano in un punto.

Motivati da questioni pratiche (ritracciare i campi dopo le inondazioni del Nilo) i greci si occuparono degli oggetti prima menzionati.

Euclide enunciò 5 proprietà intuitive ed elementari (quasi) da essi soddisfatte

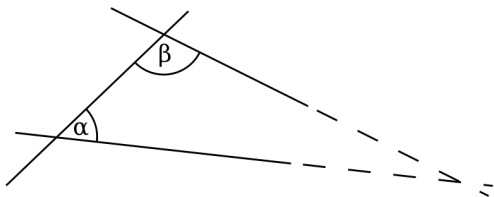
- Ogni coppia di punti distinti è congiunta da una e una sola retta;
- Ogni retta è estendibile indefinitamente in entrambe le direzioni;
- È sempre possibile tracciare un cerchio di dato centro e raggio;
- Gli angoli retti sono tutti uguali tra loro;
- Se due rette intersecate con una terza retta formano angoli la cui somma è inferiore a due retti, allora tali rette si incontrano in un punto.

Assioma delle Parallele

Introduzione

Intuizione vs Assiomi

Assiomi



- Coerenti, ossia non devo dedurre contraddizioni;
- Indipendenti, ossia un assioma non deve essere conseguenza dei restanti;
- completo, ossia ogni fatto vero per la teoria deve essere dimostrabile.

- Coerenti, ossia non devo dedurre contraddizioni;
- Indipendenti, ossia un assioma non deve essere conseguenza dei restanti;
- completo, ossia ogni fatto vero per la teoria deve essere dimostrabile.

- Coerenti, ossia non devo dedurre contraddizioni;
- Indipendenti, ossia un assioma non deve essere conseguenza dei restanti;
- completo, ossia ogni fatto vero per la teoria deve essere dimostrabile.

- Teorema è una qualsiasi deduzione logica dagli assiomi
- Verità è una qualsiasi affermazione che risulta soddisfatta nella teoria;
- Un Teorema esprime sempre un fatto vero;
- Un sistema è completo se, viceversa, ogni fatto vero è conseguenza logica degli assiomi.

- Teorema è una qualsiasi deduzione logica dagli assiomi
- Verità è una qualsiasi affermazione che risulta soddisfatta nella teoria;
- Un Teorema esprime sempre un fatto vero;
- Un sistema è completo se, viceversa, ogni fatto vero è conseguenza logica degli assiomi.

- Teorema è una qualsiasi deduzione logica dagli assiomi
- Verità è una qualsiasi affermazione che risulta soddisfatta nella teoria;
- Un Teorema esprime sempre un fatto vero;
- Un sistema è completo se, viceversa, ogni fatto vero è conseguenza logica degli assiomi.

- Teorema è una qualsiasi deduzione logica dagli assiomi
- Verità è una qualsiasi affermazione che risulta soddisfatta nella teoria;
- Un Teorema esprime sempre un fatto vero;
- Un sistema è completo se, viceversa, ogni fatto vero è conseguenza logica degli assiomi.

- Ogni Triangolo ha somma degli angoli interni pari a due retti;
- Un Triangolo è equilatero se e solo se è equiangolo;
- Teorema di Pitagora.

- Ogni Triangolo ha somma degli angoli interni pari a due retti;
- Un Triangolo è equilatero se e solo se è equiangolo;
- Teorema di Pitagora.

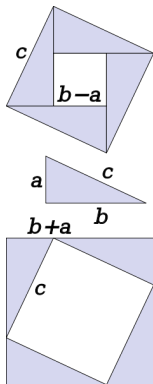
- Ogni Triangolo ha somma degli angoli interni pari a due retti;
- Un Triangolo è equilatero se e solo se è equiangolo;
- Teorema di Pitagora.

Teorema di Pitagora

Introduzione

Intuizione vs Assiomi

Assiomi



- Coerenza si prova usando modelli, ad esempio il piano reale;
- Geometria Analitica consente di studiare la Geometria Piana;
- Si descrivono rette e punti mediante equazioni su coppie di numeri reali.

- Coerenza si prova usando modelli, ad esempio il piano reale;
- Geometria Analitica consente di studiare la Geometria Piana;
- Si descrivono rette e punti mediante equazioni su coppie di numeri reali.

- Coerenza si prova usando modelli, ad esempio il piano reale;
- Geometria Analitica consente di studiare la Geometria Piana;
- Si descrivono rette e punti mediante equazioni su coppie di numeri reali.

- Il sistema assiomatico euclideo è coerente se è coerente il sistema \mathbb{R}^2 ;
- \mathbb{R}^2 è coerente se lo è \mathbb{R} ;
- \mathbb{R} è coerente se lo è \mathbb{N} , ossia l'Aritmetica.

- Il sistema assiomatico euclideo è coerente se è coerente il sistema \mathbb{R}^2 ;
- \mathbb{R}^2 è coerente se lo è \mathbb{R} ;
- \mathbb{R} è coerente se lo è \mathbb{N} , ossia l'Aritmetica.

- Il sistema assiomatico euclideo è coerente se è coerente il sistema \mathbb{R}^2 ;
- \mathbb{R}^2 è coerente se lo è \mathbb{R} ;
- \mathbb{R} è coerente se lo è \mathbb{N} , ossia l'Aritmetica.

- L'aritmetica è incoerente;
- oppure è incompleta;
- esiste un'affermazione che dice di non essere dimostrabile e tale affermazione o è vera oppure l'Aritmetica è contraddittoria.

- L'aritmetica è incoerente;
- oppure è incompleta;
- esiste un'affermazione che dice di non essere dimostrabile e tale affermazione o è vera oppure l'Aritmetica è contraddittoria.

- L'aritmetica è incoerente;
- oppure è incompleta;
- esiste un'affermazione che dice di non essere dimostrabile e tale affermazione o è vera oppure l'Aritmetica è contraddittoria.

- Trovare un modello in cui valgono tutti gli assiomi tranne uno;
- Questo assioma è allora indipendente dagli altri;
- Caso molto studiato l'indipendenza dell'assioma delle parallele dagli altri assiomi euclidei.

- Trovare un modello in cui valgono tutti gli assiomi tranne uno;
- Questo assioma è allora indipendente dagli altri;
- Caso molto studiato l'indipendenza dell'assioma delle parallele dagli altri assiomi euclidei.

- Trovare un modello in cui valgono tutti gli assiomi tranne uno;
- Questo assioma è allora indipendente dagli altri;
- Caso molto studiato l'indipendenza dell'assioma delle parallele dagli altri assiomi euclidei.

Esistono molte versioni equivalenti più o meno intuitive di questo assioma.

- (Playfair) Dati una retta e un punto ad esso esterno esiste una ed una sola retta parallela alla retta data passante per tale punto;
- L'insieme dei punti equidistanti da un retta è una retta;
- La somma degli angoli di ogni triangolo vale due retti;
- Esiste un triangolo in cui la somma degli angoli vale due retti;
- Esistono triangoli simili ma non congruenti;
- Un quadrilatero con tre angoli retti ha retto anche il quarto;
- Teorema di Pitagora;

Esistono molte versioni equivalenti più o meno intuitive di questo assioma.

- (Playfair) Dati una retta e un punto ad esso esterno esiste una ed una sola retta parallela alla retta data passante per tale punto;
- L'insieme dei punti equidistanti da un retta è una retta;
- La somma degli angoli di ogni triangolo vale due retti;
- Esiste un triangolo in cui la somma degli angoli vale due retti;
- Esistono triangoli simili ma non congruenti;
- Un quadrilatero con tre angoli retti ha retto anche il quarto;
- Teorema di Pitagora;

Esistono molte versioni equivalenti più o meno intuitive di questo assioma.

- (Playfair) Dati una retta e un punto ad esso esterno esiste una ed una sola retta parallela alla retta data passante per tale punto;
- L'insieme dei punti equidistanti da un retta è una retta;
- La somma degli angoli di ogni triangolo vale due retti;
- Esiste un triangolo in cui la somma degli angoli vale due retti;
- Esistono triangoli simili ma non congruenti;
- Un quadrilatero con tre angoli retti ha retto anche il quarto;
- Teorema di Pitagora;

Versioni alternative dell'assioma delle parallele

Esistono molte versioni equivalenti più o meno intuitive di questo assioma.

- (Playfair) Dati una retta e un punto ad esso esterno esiste una ed una sola retta parallela alla retta data passante per tale punto;
- L'insieme dei punti equidistanti da un retta è una retta;
- La somma degli angoli di ogni triangolo vale due retti;
- Esiste un triangolo in cui la somma degli angoli vale due retti;
- Esistono triangoli simili ma non congruenti;
- Un quadrilatero con tre angoli retti ha retto anche il quarto;
- Teorema di Pitagora;

Esistono molte versioni equivalenti più o meno intuitive di questo assioma.

- (Playfair) Dati una retta e un punto ad esso esterno esiste una ed una sola retta parallela alla retta data passante per tale punto;
- L'insieme dei punti equidistanti da un retta è una retta;
- La somma degli angoli di ogni triangolo vale due retti;
- Esiste un triangolo in cui la somma degli angoli vale due retti;
- Esistono triangoli simili ma non congruenti;
- Un quadrilatero con tre angoli retti ha retto anche il quarto;
- Teorema di Pitagora;

Esistono molte versioni equivalenti più o meno intuitive di questo assioma.

- (Playfair) Dati una retta e un punto ad esso esterno esiste una ed una sola retta parallela alla retta data passante per tale punto;
- L'insieme dei punti equidistanti da un retta è una retta;
- La somma degli angoli di ogni triangolo vale due retti;
- Esiste un triangolo in cui la somma degli angoli vale due retti;
- Esistono triangoli simili ma non congruenti;
- Un quadrilatero con tre angoli retti ha retto anche il quarto;
- Teorema di Pitagora;

Esistono molte versioni equivalenti più o meno intuitive di questo assioma.

- (Playfair) Dati una retta e un punto ad esso esterno esiste una ed una sola retta parallela alla retta data passante per tale punto;
- L'insieme dei punti equidistanti da un retta è una retta;
- La somma degli angoli di ogni triangolo vale due retti;
- Esiste un triangolo in cui la somma degli angoli vale due retti;
- Esistono triangoli simili ma non congruenti;
- Un quadrilatero con tre angoli retti ha retto anche il quarto;
- Teorema di Pitagora;

- **Costruire i teoremi deducibili dai primi quattro assiomi;**
- Questi vengono detti risultati della Geometria assoluta;
- Euclide, Bolyai, Gauss, Taurinus.

- Costruire i teoremi deducibili dai primi quattro assiomi;
- Questi vengono detti risultati della Geometria assoluta;
- Euclide, Bolyai, Gauss, Taurinus.

- Costruire i teoremi deducibili dai primi quattro assiomi;
- Questi vengono detti risultati della Geometria assoluta;
- Euclide, Bolyai, Gauss, Taurinus.

Esistono tre famiglie a seconda che la somma S degli angoli interni di (ogni) triangolo sia $\geq < \pi$ radianti.

- Ellittica o Sferica: $S > \pi$;
- Euclidea: $S = \pi$;
- Iperbolica: $S < \pi$.

Esistono tre famiglie a seconda che la somma S degli angoli interni di (ogni) triangolo sia $\geq < \pi$ radianti.

- Ellittica o Sferica: $S > \pi$;
- Euclidea: $S = \pi$;
- Iperbolica: $S < \pi$.

Esistono tre famiglie a seconda che la somma S degli angoli interni di (ogni) triangolo sia $\geq < \pi$ radianti.

- Ellittica o Sferica: $S > \pi$;
- Euclidea: $S = \pi$;
- Iperbolica: $S < \pi$.

- Il piano è interpretato come una sfera, le rette come cerchi massimi i punti come punti della sfera;
- Qui non fallisce solo il quinto postulato ma anche la richiesta di indefinita prolungabilità delle rette.
- Le rette hanno lunghezza finita;
- Inoltre dati dai poli nord e sud passano infinite rette (i meridiani).

- Il piano è interpretato come una sfera, le rette come cerchi massimi i punti come punti della sfera;
- Qui non fallisce solo il quinto postulato ma anche la richiesta di indefinita prolungabilità delle rette.
- Le rette hanno lunghezza finita;
- Inoltre dati dai poli nord e sud passano infinite rette (i meridiani).

- Il piano è interpretato come una sfera, le rette come cerchi massimi i punti come punti della sfera;
- Qui non fallisce solo il quinto postulato ma anche la richiesta di indefinita prolungabilità delle rette.
- Le rette hanno lunghezza finita;
- Inoltre dai poli nord e sud passano infinite rette (i meridiani).

- Il piano è interpretato come una sfera, le rette come cerchi massimi i punti come punti della sfera;
- Qui non fallisce solo il quinto postulato ma anche la richiesta di indefinita prolungabilità delle rette.
- Le rette hanno lunghezza finita;
- Inoltre dai poli nord e sud passano infinite rette (i meridiani).

Molto più misteriosa

- Il Piano è una strana superficie detta pseudosfera di Beltrami;
- Le rette sono linee di minima lunghezza tra due punti (geodetiche);
- Due rette si possono avvicinare indefinitamente senza toccarsi.

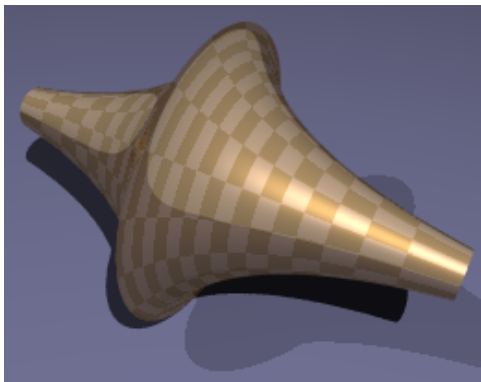
Molto più misteriosa

- Il Piano è una strana superficie detta pseudosfera di Beltrami;
- Le rette sono linee di minima lunghezza tra due punti (geodetiche);
- Due rette si possono avvicinare indefinitamente senza toccarsi.

Molto più misteriosa

- Il Piano è una strana superficie detta pseudosfera di Beltrami;
- Le rette sono linee di minima lunghezza tra due punti (geodetiche);
- Due rette si possono avvicinare indefinitamente senza toccarsi.

Pseudosfera di Beltrami



Gerolamo Saccheri (1667-1733) voleva dimostrare la dipendenza del quinto dagli altri assiomi.

- **Uso quadrilatero trirettangolo**
 - Riduzione ai 3 casi ellittico, euclideo e iperbolico;
 - Eliminazione del caso ellittico;
 - Nel caso iperbolico esistono rette che si avvicinano indefinitamente senza attraversarsi;
 - Saccheri ritiene tale deduzione aberrante nei confronti del concetto di retta.

Gerolamo Saccheri (1667-1733) voleva dimostrare la dipendenza del quinto dagli altri assiomi.

- Uso quadrilatero trirettangolo
- Riduzione ai 3 casi ellittico, euclideo e iperbolico;
- Eliminazione del caso ellittico;
- Nel caso iperbolico esistono rette che si avvicinano indefinitamente senza attraversarsi;
- Saccheri ritiene tale deduzione aberrante nei confronti del concetto di retta.

Gerolamo Saccheri (1667-1733) voleva dimostrare la dipendenza del quinto dagli altri assiomi.

- Uso quadrilatero trirettangolo
- Riduzione ai 3 casi ellittico, euclideo e iperbolico;
- Eliminazione del caso ellittico;
- Nel caso iperbolico esistono rette che si avvicinano indefinitamente senza attraversarsi;
- Saccheri ritiene tale deduzione aberrante nei confronti del concetto di retta.

Gerolamo Saccheri (1667-1733) voleva dimostrare la dipendenza del quinto dagli altri assiomi.

- Uso quadrilatero trirettangolo
- Riduzione ai 3 casi ellittico, euclideo e iperbolico;
- Eliminazione del caso ellittico;
- Nel caso iperbolico esistono rette che si avvicinano indefinitamente senza attraversarsi;
- Saccheri ritiene tale deduzione aberrante nei confronti del concetto di retta.

Gerolamo Saccheri (1667-1733) voleva dimostrare la dipendenza del quinto dagli altri assiomi.

- Uso quadrilatero trirettangolo
- Riduzione ai 3 casi ellittico, euclideo e iperbolico;
- Eliminazione del caso ellittico;
- Nel caso iperbolico esistono rette che si avvicinano indefinitamente senza attraversarsi;
- Saccheri ritiene tale deduzione aberrante nei confronti del concetto di retta.

- **Analisi dettagliata del caso iperbolico;**
- Dimostrazione che non esistono triangoli simili che non sono uguali;
- L'area di un triangolo è una funzione dei suoi angoli;
- ... e dei suoi lati;
- in geometria euclidea vale il teorema di Erone

$$A(a, b, c) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

- Analisi dettagliata del caso iperbolico;
- Dimostrazione che non esistono triangoli simili che non sono uguali;
- L'area di un triangolo è una funzione dei suoi angoli;
- ... e dei suoi lati;
- in geometria euclidea vale il teorema di Erone
$$A(a, b, c) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

- Analisi dettagliata del caso iperbolico;
- Dimostrazione che non esistono triangoli simili che non sono uguali;
- L'area di un triangolo è una funzione dei suoi angoli;
- ... e dei suoi lati;
- in geometria euclidea vale il teorema di Erone

$$A(a, b, c) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

- Analisi dettagliata del caso iperbolico;
- Dimostrazione che non esistono triangoli simili che non sono uguali;
- L'area di un triangolo è una funzione dei suoi angoli;
- ... e dei suoi lati;
- in geometria euclidea vale il teorema di Erone

$$A(a, b, c) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

- Analisi dettagliata del caso iperbolico;
- Dimostrazione che non esistono triangoli simili che non sono uguali;
- L'area di un triangolo è una funzione dei suoi angoli;
- ... e dei suoi lati;
- in geometria euclidea vale il teorema di Erone

$$A(a, b, c) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

- Le curve equidistanti ad una retta non sono rette (orocicli);
- Data una retta r e un punto P ad esso esterno a distanza d , esiste un angolo limite $\alpha = \alpha(d)$ tale che tutte le rette che formano angolo β con $\alpha \leq \beta \leq \pi - \alpha$ non intersecano r
- $\sin \alpha = \frac{1}{\cosh(d)}$.

- Le curve equidistanti ad una retta non sono rette (orocicli);
- Data una retta r e un punto P ad esso esterno a distanza d , esiste un angolo limite $\alpha = \alpha(d)$ tale che tutte le rette che formano angolo β con $\alpha \leq \beta \leq \pi - \alpha$ non intersecano r
- $\sin \alpha = \frac{1}{\cosh(d)}$.

- Le curve equidistanti ad una retta non sono rette (orocicli);
- Data una retta r e un punto P ad esso esterno a distanza d , esiste un angolo limite $\alpha = \alpha(d)$ tale che tutte le rette che formano angolo β con $\alpha \leq \beta \leq \pi - \alpha$ non intersecano r
- $\sin \alpha = \frac{1}{\cosh(d)}$.

Kant dichiara l'esistenza di:

- Giudizi analitici a priori, tautologie, non forniscono informazione;
- Giudizi sintetici a posteriori, risultati sperimentali;
- Giudizi sintetici a priori;
- La nostra mente può organizzare le nostre conoscenze solo in un determinato schema spaziale;
- quindi l'unica geometria possibile è quella euclidea.

Kant dichiara l'esistenza di:

- Giudizi analitici a priori, tautologie, non forniscono informazione;
- Giudizi sintetici a posteriori, risultati sperimentali;
- Giudizi sintetici a priori;
- La nostra mente può organizzare le nostre conoscenze solo in un determinato schema spaziale;
- quindi l'unica geometria possibile è quella euclidea.

Kant dichiara l'esistenza di:

- Giudizi analitici a priori, tautologie, non forniscono informazione;
- Giudizi sintetici a posteriori, risultati sperimentali;
- Giudizi sintetici a priori;
- La nostra mente può organizzare le nostre conoscenze solo in un determinato schema spaziale;
- quindi l'unica geometria possibile è quella euclidea.

Kant dichiara l'esistenza di:

- Giudizi analitici a priori, tautologie, non forniscono informazione;
- Giudizi sintetici a posteriori, risultati sperimentali;
- Giudizi sintetici a priori;
- La nostra mente può organizzare le nostre conoscenze solo in un determinato schema spaziale;
- quindi l'unica geometria possibile è quella euclidea.

Kant dichiara l'esistenza di:

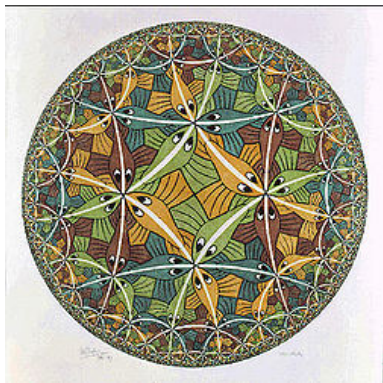
- Giudizi analitici a priori, tautologie, non forniscono informazione;
- Giudizi sintetici a posteriori, risultati sperimentali;
- Giudizi sintetici a priori;
- La nostra mente può organizzare le nostre conoscenze solo in un determinato schema spaziale;
- quindi l'unica geometria possibile è quella euclidea.

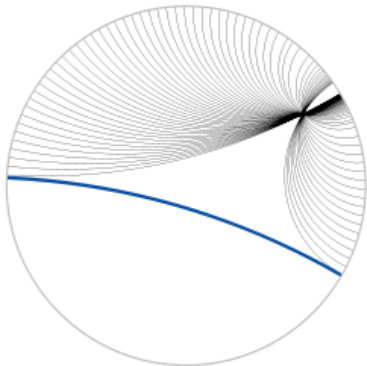
- Come mostrare che la geometria iperbolica di Lobachevski non conduce a contraddizioni?
- Trovare modelli euclidei per tale geometria;
- Modello di Poincaré;
- Modello di Beltrami-Klein.

- Come mostrare che la geometria iperbolica di Lobachevski non conduce a contraddizioni?
- Trovare modelli euclidei per tale geometria;
 - Modello di Poincaré;
 - Modello di Beltrami-Klein.

- Come mostrare che la geometria iperbolica di Lobachevski non conduce a contraddizioni?
- Trovare modelli euclidei per tale geometria;
- Modello di Poincaré;
- Modello di Beltrami-Klein.

- Come mostrare che la geometria iperbolica di Lobachevski non conduce a contraddizioni?
- Trovare modelli euclidei per tale geometria;
- Modello di Poincaré;
- Modello di Beltrami-Klein.





Riferimenti bibliografici

- E. Agazzi, D. Palladino, *Le Geometrie non Euclidee e i fondamenti della geometria*. Edizioni Scientifiche e Tecniche Mondadori 1978.
- I. Toth, *Aristotele e i fondamenti assiomatici della geometria*. Edizioni Vita e Pensiero, 1998.
- R. Bonola, *La geometria non-euclidea. Esposizione storico-critica del suo sviluppo*. N. Zanichelli, 1906.
- (EN) R. Bonola, *Non-Euclidean geometry; a critical and historical study of its development*. Open Court Publishing Company, 1912.
- (EN) F. Enriques, *Conferenze sulla geometria non-euclidea*. N. Zanichelli, 1918.
- (FR) P. Barbarin, *La géométrie non euclidienne*. Gauthier-Villars, 1928.

Riferimenti bibliografici

- E. Agazzi, D. Palladino, *Le Geometrie non Euclidee e i fondamenti della geometria*. Edizioni Scientifiche e Tecniche Mondadori 1978.
- I. Toth, *Aristotele e i fondamenti assiomatici della geometria*. Edizioni Vita e Pensiero, 1998.
- R. Bonola, *La geometria non-euclidea. Esposizione storico-critica del suo sviluppo*. N. Zanichelli, 1906.
- (EN) R. Bonola, *Non-Euclidean geometry; a critical and historical study of its development*. Open Court Publishing Company, 1912.
- (EN) F. Enriques, *Conferenze sulla geometria non-euclidea*. N. Zanichelli, 1918.
- (FR) P. Barbarin, *La géométrie non euclidienne*. Gauthier-Villars, 1928.

Riferimenti bibliografici

- E. Agazzi, D. Palladino, *Le Geometrie non Euclidee e i fondamenti della geometria*. Edizioni Scientifiche e Tecniche Mondadori 1978.
- I. Toth, *Aristotele e i fondamenti assiomatici della geometria*. Edizioni Vita e Pensiero, 1998.
- R. Bonola, *La geometria non-euclidea. Esposizione storico-critica del suo sviluppo*. N. Zanichelli, 1906.
- (EN) R. Bonola, *Non-Euclidean geometry; a critical and historical study of its development*. Open Court Publishing Company, 1912.
- (EN) F. Enriques, *Conferenze sulla geometria non-euclidea*. N. Zanichelli, 1918.
- (FR) P. Barbarin, *La géométrie non euclidienne*. Gauthier-Villars, 1928.

Riferimenti bibliografici

- E. Agazzi, D. Palladino, *Le Geometrie non Euclidee e i fondamenti della geometria*. Edizioni Scientifiche e Tecniche Mondadori 1978.
- I. Toth, *Aristotele e i fondamenti assiomatici della geometria*. Edizioni Vita e Pensiero, 1998.
- R. Bonola, *La geometria non-euclidea. Esposizione storico-critica del suo sviluppo*. N. Zanichelli, 1906.
- (EN) R. Bonola, *Non-Euclidean geometry; a critical and historical study of its development*. Open Court Publishing Company, 1912.
- (EN) F. Enriques, *Conferenze sulla geometria non-euclidea*. N. Zanichelli, 1918.
- (FR) P. Barbarin, *La géométrie non euclidienne*. Gauthier-Villars, 1928.

Riferimenti bibliografici

- E. Agazzi, D. Palladino, *Le Geometrie non Euclidee e i fondamenti della geometria*. Edizioni Scientifiche e Tecniche Mondadori 1978.
- I. Toth, *Aristotele e i fondamenti assiomatici della geometria*. Edizioni Vita e Pensiero, 1998.
- R. Bonola, *La geometria non-euclidea. Esposizione storico-critica del suo sviluppo*. N. Zanichelli, 1906.
- (EN) R. Bonola, *Non-Euclidean geometry; a critical and historical study of its development*. Open Court Publishing Company, 1912.
- (EN) F. Enriques, *Conferenze sulla geometria non-euclidea*. N. Zanichelli, 1918.
- (FR) P. Barbarin, *La géométrie non euclidienne*. Gauthier-Villars, 1928.

- E. Agazzi, D. Palladino, *Le Geometrie non Euclidee e i fondamenti della geometria*. Edizioni Scientifiche e Tecniche Mondadori 1978.
- I. Toth, *Aristotele e i fondamenti assiomatici della geometria*. Edizioni Vita e Pensiero, 1998.
- R. Bonola, *La geometria non-euclidea. Esposizione storico-critica del suo sviluppo*. N. Zanichelli, 1906.
- (EN) R. Bonola, *Non-Euclidean geometry; a critical and historical study of its development*. Open Court Publishing Company, 1912.
- (EN) F. Enriques, *Conferenze sulla geometria non-euclidea*. N. Zanichelli, 1918.
- (FR) P. Barbarin, *La géométrie non euclidienne*. Gauthier-Villars, 1928.