ON THE MATHEMATICS CURRICULUM OF THE HIGH SCHOOL

The following memorandum was composed by several of the undersigned and sent to 75 mathematicians in the United States and Canada. No attempt was made to amass a large number of signatures by canvassing the entire mathematical community. Rather, the objective was to obtain a modest number from men with mathematical competence, background, and experience and from various geographical locations. A few of the undersigned, whose support is indeed welcomed, volunteered their names when they learned about the memorandum from a colleague.

The mathematicians of this country now have a more favorable climate in which to develop and gain acceptance of improvements in mathematics education. Indeed a number of groups have recognized the opportunity and are working hard and with the best of intentions to utilize it.

It would, however, be a tragedy if the curriculum reform should be misdirected and the golden opportunity wasted. There are, unfortunately, factors and forces in the current scene which may lead us astray. Mathematicians, reacting to the dominance of education by professional educators who may have stressed pedagogy at the expense of content, may now stress content at the expense of pedagogy and be equally ineffective. Mathematicians may unconsciously assume that all young people should like what present day mathematicians like or that the only students worth cultivating are those who might become professional mathematicians. The need to learn much more mathematics today than in the past may cause us to seek shortcuts which, however, could do more harm than good.

In view of the possible pitfalls it may be helpful to formulate what appear to us to be fundamental principles and practical guidelines.

1. For whom. The mathematics curriculum of the high school should provide for the needs of all students: it should contribute to the cultural background of the general student and offer professional preparation to the future users of mathematics, that is, engineers and scientists, taking into account both the physical sciences which are the basis of our technological civilization, and the social sciences which may need progressively more mathematics in the future. While providing for the other students, the curriculum can also offer the most essential materials to the future mathematicians. Yet to offer such subjects to all students as could interest only the small minority of prospective mathematicians is wasteful and amounts to ignoring the needs of the scientific community and of society as a whole.

2. Knowing is doing. In mathematics, knowledge of any value is never possession of information, but "know-how." To know mathematics means to be able to do mathematics: to use mathematical language with some fluency, to do problems, to criticize arguments, to find proofs and, what may be the most important activity, to recognize a mathematical concept in, or to extract it from, a given concrete situation.

Therefore, to introduce new concepts without a sufficient background of concrete facts, to introduce unifying concepts where there is no experience to unify, or to harp on the introduced concepts without concrete applications which would challenge the students, is worse than useless: premature formalization may lead to sterility; premature introduction of abstractions meets resistance especially from critical minds who, before accepting an abstraction, wish to know why it is relevant and how it could be used.

3. Mathematics and science. In its cultural significance as well as in its practical use, mathematics is linked to the other sciences and the other sciences are linked to mathematics, which is their language and their essential instrument. Mathematics separated from the other sciences loses one of its most important sources of interest and motivation.

4. Inductive approach and formal proofs. Mathematical thinking is not just deductive reasoning; it does not consist merely in formal proofs. The mental processes which suggest what to prove and how to prove it are as much a part of mathematical thinking as the proof that eventually results from them. Extracting the appropriate concept from a concrete situation, generalizing from observed cases, inductive arguments, arguments by analogy, and intuitive grounds for an emerging conjecture are mathematical modes of thinking. Indeed, without some experience with such "informal" thought processes the student cannot understand the true role of formal, rigorous proof which was so well described by Hadamard: "The object of mathematical rigor is to sanction and legitimatize the conquests of intuition, and there never was any other object for it."

There are several levels of rigor. The student should learn to appreciate, to find and to criticize proofs on the level corresponding to his experience and background. If pushed prematurely to a too formal level he may get discouraged and disgusted. Moreover the feeling for rigor can be much better learned from examples wherein the proof settles genuine difficulties than from hair-splitting or endless harping on trivialities.

5. Genetic method. "It is of great advantage to the student of any subject to read the original memoirs on that subject, for science is always most completely assimilated when it is in the nascent state" wrote James Clerk Maxwell. There were some inspired teachers, such as Ernst Mach, who in order to explain an idea referred to its genesis and retraced the historical formation of the idea. This may suggest a general principle: The best way to guide the mental development of the individual is to let him retrace the mental development of the race—retrace its great lines, of course, and not the thousand errors of detail.

This genetic principle may safeguard us from a common confusion: If A is logically prior to B in a certain system, B may still justifiably precede A in teaching, especially if B has preceded A in history. On the whole, we may expect greater success by following suggestions from the genetic principle than from the purely formal approach to mathematics.

6. "Traditional" mathematics. The teaching of mathematics in the elementary and secondary schools lags far behind present day requirements and highly needs essential improvement: we emphatically subscribe to this almost universally accepted opinion. Yet the often heard assertion that the subject matter taught in the secondary schools is obsolete should be closely scrutinized and should not be taken simply at face value. Elementary algebra, plane and solid geometry, trigonometry, analytic geometry and the calculus are still fundamental, as they were fifty or a hundred years ago: future users of mathematics must learn all these subjects whether they are preparing to become mathematicians, physical scientists, social scientists or engineers, and all these subjects can offer cultural values to the general students. The traditional high school curriculum comprises all these subjects, except calculus, to some extent; to drop any one of them would be disastrous.

What is bad in the present high school curriculum is not so much the subject-matter presented as the isolation of mathematics from other domains of knowledge and inquiry, especially from the physical sciences, and the isolation of the various subjects offered from each other; even the techniques and theorems within the same subject appear as isolated, disconnected tricks to the student, who is left in the dark about the origin and the purpose of the manipulations and facts that he is supposed to learn by rote. And so, unfortunately, it often happens that the material offered appears as useless and boring, except perhaps, to the few prospective mathematicians who may persist despite the curriculum.

7. "Modern" mathematics. In view of the lack of connection between the various parts of the present curricula, the groups working on new curricula may be well advised in seeking to introduce unifying general concepts. We think, too that judicious use of sets and of the language and concepts of *abstract* algebra may bring more coherence and unity into the high school curriculum. Yet, the spirit of modern mathematics cannot be taught by merely repeating its terminology. Consistently with our principles, we wish that the introduction of new terms and concepts should be preceded by sufficient *concrete* preparation and followed by genuine, challenging applications and not by thin and pointless material: one must motivate and apply a new concept if one wishes to convince an intelligent youngster that the concept warrants attention.

We cannot enter here into detailed analysis of the proposed new curricula, but we cannot leave unsaid that, in judging them on the basis of the guidelines stated above (Sections 1–5), we find points with which we cannot agree.

Of course, not all mathematicians have the same taste. Mathematics has many aspects. It can be regarded as an instrument to understand the world around us: mathematics presumably possessed this value for Archimedes and Newton. Mathematics can also be regarded as a game with arbitrary rules where the principal consideration is to stick to the rules of the game: some such view may be considered suitable for certain problems of foundations. There are several other aspects of mathematics, and a professional mathematician may favor any one. Yet when it comes to teaching, the choice is not a mere matter of taste. We may expect that an intelligent youngster would want to explore the world around him, but we cannot expect him to learn arbitrary rules: why just these and not others?

At any rate, we fervently wish much success to the workers on the new curricula. We wish especially that the new curricula should reflect more the connection between mathematics and science and carefully heed the distinction between matters logically prior and matters which should have priority in teaching. Only in this way can we hope that the basic values of mathematics, its real meaning, purpose, and usefulness will be made accessible to all students, including of course, the prospective mathematicians. The recently expressed "wide spread concern about a trend to excessive emphasis on abstraction in the teaching of mathematics to engineers" points in the same direction.*

Lars V. Ahlfors, Harvard University
Harold M. Bacon, Stanford University
Clifford Bell, University of California, Los Angeles
Richard E. Bellman, Rand Corporation
Lipman Bers, New York University
Garrett Birkhoff, Harvard University
R. P. Boas, Northwestern University
Alfred T. Brauer, University of North Carolina
Richard Brauer, Harvard University
Jack R. Britton, University of Colorado
R. C. Buck, University of Wisconsin
George F. Carrier, Harvard University
Hirsh Cohen, International Business Machines Corp.
Richard Courant, New York University
H. S. M. Coxeter, University of Toronto
Dan T. Dawson, Stanford University
Avron Douglis, University of Maryland
Arthur Erdélyi, California Institute of Technology
Walter Freiberger, Brown University
K. O. Friedrichs, New York University
Paul R. Garabedian, New York University
David Gilbarg, Stanford University
Sydney Goldstein, Harvard University
Herman Goldstine, International Business Machines Corp.
Herbert Greenberg, International Business Machines Corp.
John D. Hancock, Alameda State College
Charles A. Hutchinson, University of Colorado
Mark Kac, Rockefeller Institute
Wilfred Kaplan, University of Michigan
Aubrey J. Kempner, University of Colorado
Lucien B. Kinney, Stanford University
Morris Kline, New York University
Ignace I. Kolodner, University of New Mexico
Rudolph E. Langer, University of Wisconsin
C. M. Larsen, San Jose State College
Peter D. Lax, New York University
Walter Leighton, Western Reserve University
Norman Levinson, Massachusetts Institute of Technology
Hans Lewy, University of California, Berkeley
W. Robert Mann, University of North Carolina
M. H. Martin, University of Maryland
Deane Montgomery, Institute for Advanced Study
Marston Morse, Institute for Advanced Study
Zeev Nehari, Carnegie Institute of Technology
Jerzy Neyman, University of California, Berkeley

* First Summer Study Group in Theoretical and Applied Mechanics Curricula, Boulder, Colorado, June 1961.

THE BRING-JERRARD EQUATION AND WEIERSTRASS ELLIPTIC FUNCTIONS

ALVIN HAUSNER, City College of New York

We assume that the reader is acquainted with the basic properties of elliptic functions which are of the Weierstrass $\wp$-type. We will quickly summarize what we need concerning the $\wp$-function and refer the reader to [2, pp. 146–188 and pp. 227–228] for a complete discussion.

E1. If ω_1 and ω_2 are complex numbers with a nonreal ratio, then a Weierstrass $\wp$-function with periods ω_1 and ω_2 exists. We denote this function by $\wp(z; \omega_1, \omega_2)$.

E2. $\wp(z; \omega_1, \omega_2)$ has so-called invariants $g_2(\omega_1, \omega_2)$ and $g_3(\omega_1, \omega_2)$ which enter into the differential equation satisfied by $\wp$, namely: $[\wp'(z)]^2 = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3$.

E3. If g_2 and g_3 are arbitrarily assigned complex numbers meeting the condition $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$, then a $\wp$-function with invariants g_2 and g_3 exists. We denote this function by $\wp(z | g_2, g_3)$. In particular, if g_2 is chosen to be 0 and g_3 is taken to be any complex $a \neq 0$, then the function $\wp(z | 0, a)$ exists. It is this latter type of $\wp$-function which will be of service to us in this work.

E4. Any $\wp$-function is of order 2 since it has but one pole of order 2 in each period-parallelogram. Thus $\wp$ takes each complex value (including ∞) exactly twice in any period-parallelogram. We will assume that ω_2/ω_1 has a positive imaginary part and will work throughout with the basic period-parallelogram P with vertices at 0, ω_1, $\omega_1 + \omega_2$ and ω_2. More definitely, P consists of the points of

Inghilterra IGCSE		
Cap.	Contenuti	Pagine
3	*Linee,angoli e forme*	29
	Classificazione di linee ed angoli Misura di angoli con goniometro Relazioni tra angoli Rette parallele tagliate da una trasversale Classificazione dei triangoli Angoli nei triangoli Quadrilateri Angoli nei quadrilateri Poligoni Angoli nei poligoni Il cerchio e le sue parti Costruzioni con riga e compasso	
7	*Perimetro, area e volume*	24
	Perimetro ed area in 2D Perimetro ed area del cerchio Aree superficiali e volumi	
11	*Teorema di Pitagora e figure simili*	23
	Teorema di Pitagora e applicazioni Triangoli simili Congruenze	
15	*Disegni in scala, angoli orientati e trigonometria*	41
	Disegni in scala Angoli orientati Seno,coseno e tangente Risoluzione dei problemi con la trigonometria Teoremi del seno e del coseno Trigonometria in 3D	
19	*Simmetrie e luoghi*	21
	Simmetrie in 2D Simmetrie in 3D Proprietà simmetriche del cerchio Angoli nel cerchio Luoghi geometrici	
23	*Trasformazioni e matrici*	45
	Trasformazioni nel piano Vettori Prime operazioni con i vettori Matrici Le matrici per descrivere le trasformazioni nel piano	

Inghilterra IB		
Cap.	Contenuti	Pagine
9	*Misure circolari e funzioni trigonometriche*	40
	Radianti Seno,coseno e tg: definizione e grafici Valori delle funzioni trigonometriche Trasformazioni delle funzioni trigonometriche Funzioni trigonometriche inverse	
(10)	(*Equazioni trigonometriche ed identità*)	
11	*Geometria dei triangoli dei cerchi*	41
	Triangoli rettangoli (con trigonometria) Teorema del sin e cos Trigonometria in 3D Lunghezza di un arco Area dei settori circolari I triangoli nei cerchi	
(12)	(*Ulteriore trigonometria*)	
13	*Vettori*	37
	Definizione, base e prime operazioni Vettori paralleli Distanza Angoli tra vettori e prodotto scalare Proprietà del prodotto scalare Area del parallelogramma tra vettori e prodotto vettoriale Proprietà del prodotto vettoriale	
14	*Linee e piani nello spazio*	62
	Equazione vettoriale di una linea Equazioni parametriche e cartesiane Equazioni vettoriali del piano Angoli ed intersezioni tra linee e piani Intersezioni di tre piani Strategie per risolvere problemi con linee e piani	

Italia I		
Tema D: Le nozioni di base della geometria		
Unità.	Contenuti	Pagine
14	*Il piano euclideo*	
	I concetti primitivi della geometria:punto, retta e piano Gli assiomi sui concetti primitivi (appartenenza e ordine) Definizione di piano euclideo Definizione di figura, semirette e annessi Assioma di partizione del piano da parte di una retta Definizione di semipiano e angolo Assioma di partizione del piano da parte di una poligonale chiusa Definizione di poligono	
15	*Dalla congruenza alla misura*	
	Movimento rigido e definizione di congruenza Assiomi di congruenza, trasporto di segmenti e angoli Poligoni regolari Applicazione del concetto di congruenza ai segmenti Applicazione del concetto do congruenza agli angoli Classificazione degli angoli e primi teoremi Misure di segmenti Misure di angoli	
16	*Congruenza nei triangoli*	
	Classificazione dei triangoli Segmenti notevoli in un triangolo Definizione dei triangoli congruenti Criteri di congruenza(I e II) Triangoli isosceli III criterio congruenza Disuguaglianze nei triangoli Costruzioni:trasporto di un angolo, punto medio e bisettrice	
17	*Rette perpendicolari e parallele*	
	Definizione perpendicolari(esistenza e unicità) Asse di un segmento e proiezione Definizione parallele, assioma delle parallele Criteri di parallelismo, rette parallele tagliate da trasversale Costruzione:parallela per un punto Proprietà angoli nei poligoni Criteri di congruenza nei triangoli rettangoli e le loro proprietà	
18	*Quadrilateri*	
	Trapezi:definizione, proprietà e teoremi Parallelogrammi:definizione, proprietà e teoremi Rettangoli,rombi e quadrati:definizione, proprietà e teoremi Corrispondenza di Talete e piccolo teorema di Talete Punti medi di un triangolo Costruzione:divisione di un segmento in patri uguali	
19	*Isometrie*	
	Isometrie: definizione e proprietà Simmetrie assiali e centrali Traslazioni e rotazioni Composizione di trasformazioni Isometrie nel piano cartesiano	

Italia II		
Unità.	Contenuti	Pagine
	Tema D: La circonferenza ed i poligoni iscritti e circoscritti	
10	*Circonferenza e cerchio*	
	Definizione di asse e bisettrice Definizione circonferenza(come luogo) e cerchio Definizione corde e diametri e studio proprietà Studio delle parti del cerchio e della circonferenza e angoli al centro Posizione reciproca tra rette e circonferenza Posizione reciproca di due circonferenze Angoli alla circonferenza e le loro proprietà	
11	*Poligoni iscritti e circoscritti*	
	Definizioni e condizioni inscrivibilità e circoscrivibilità Triangoli inscritti e circoscritti Quadrilateri inscritti e circoscritti Poligoni regolari: definizione Poligoni regolari inscritti e circoscritti Punti notevoli di un triangolo	
	Tema E: L'area ed i teoremi di Pitagora ed Euclide	
12	*Area*	
	Definizione di superfici equivalenti Assiomi Equiscomponibilità Teoremi di equivalenza Area: definizione e formule	
13	*Teoremi di Pitagora e di Euclide*	
	Teorema di Pitagora e il suo inverso Applicazioni del teorema di Pitagora I e II teorema di Euclide	
	Tema F: Similitudine e complementi di geometria	
14	*Teorema di Talete e similitudine*	
	Rapporto e proporzione tra segmenti Teorema di Talete Applicazioni e conseguenze del teorema Introduzione al concetto di similitudine Triangoli simili: definizione e criteri di similitudine Poligoni simili Similitudine e circonferenza Sezione aurea, triangolo e rettangolo aureo	
15	*Complementi:circonferenza, poligoni iscritti e circoscritti*	
	Lunghezza della circonferenza Area di un cerchio Lunghezza d'arco e settori circolari Raggio circonferenza inscritta e circoscritta Trapezi circoscritti Lati dei poligoni regolari	
16	*Omotetie e similitudini*	
	Completare	

Unità.	Contenuti	Pagine
	Italia III	
	Tema B:	
4	*Piano cartesiano e funzioni lineari*	32
	Richiami sul piano cartesiano Introduzione alla geometria analitica Distanza, punto medio e baricentro Funzioni lineari: uso dei grafici per risolvere disequazioni	
5	*Retta nel piano cartesiano*	67
	Rette parallele agli assi. Rette generiche Rette parallele, perpendicolari, incidenti e coincidenti Determinare l'equazione di una retta Distanza punto-retta. Equazione della bisettrice Fasci di rette Rappresentazione analitica dei diversi enti geometrici	
6	*Simmetrie traslazioni e dilatazioni nel piano cartesiano*	57
	Equazioni di simmetria centrale Curva simmetrica rispetto ad un punto Simmetrie assiali Traslazioni Dilatazioni e omotetie Grafici di funzioni "base"	
	Tema C:	
7	*Circonferenza*	64
	Definizione ed equazione Posizione reciproca tra retta e circonferenza Determinare le equazioni di una circonferenza Posizione reciproca di due circonferenze Fasci di circonferenze	
8	*Parabola*	71
	Parabola come luogo dei punti.Equazioni della parabola Posizione reciproca tra parabola e retta Trovare equazioni della parabola Fasci di parabole	
9	*Ellissi*	42
	Ellisse come luogo dei punti.Equazione dell'ellisse Eccentricità Area dell'ellisse Posizione reciproca tra ellisse e retta Trovare le equazioni dell'ellisse Ellissi traslate	
10	*Iperbole*	56
	Iperbole come luogo dei punti Equazioni dell'iperbole, asintoti, fuochi, eccentricità Iperbole equilatera Funzione omografica Posizione reciproca tra iperbole e retta Trovare equazioni dell'iperbole Iperbole traslata	
11	*Coniche e luoghi geometrici*	61
	Sezioni coniche. Equazione di una conica generica Definizione di una conica mediante e Posizione reciproca di due coniche Coniche e disequazioni di II grado	

Italia IV		
Unità.	Contenuti	Pagine
	Tema F: Funzioni goniometriche	
1	*Angoli e funzioni goniometriche*	75
	Definizione di angolo.Misura Definizione delle funzioni goniometriche Calcolo e proprietà delle funzioni goniometriche Grafici delle funzioni goniometriche Funzioni goniometriche inverse Reciproche delle funzioni goniometriche e le loro proprietà	
(2)	(*Formule e identità goniometriche*)	
	Tema G: Equazioni e disequazioni goniometriche e trigonometria	
(3)	(*Equazioni goniometriche*)	
(4)	(*Disequazioni goniometriche*)	
5	*Trigonometria*	80
	Teoremi sui triangoli rettangoli Area dei triangoli, teorema della corda Problemi sui triangoli Teorema del sin e cos Risoluzione di un triangolo qualsiasi	
	Tema H: Applicazioni trigonometriche	
6	*Rotazioni,similitudini e affinità*	50
	Le rotazioni nella geometria analitica Rotazioni per lo studio di coniche con assi non paralleli ai cartesiani Affinità e le loro proprietà Similitudini e isometrie	
(7)	(*Numeri complessi e coordinate polari*)	
	Tema I: Geometria analitica ed euclidea nello spazio	
8	*Rette piani e figure nello spazio*	71
	Assiomi di geometria nello spazio Posizioni reciproche di rette e piani Le figure nello spazio Perpendicolarità e parallelismo nello spazio Distanze, angoli tra rette e proiezioni Prismi, parallelepipedi,angoloidi e piramidi.Solidi di rotazione.Poliedri Trasformazioni geometriche nello spazio	
9	*Misure di superfici e di volumi*	49
	Superficie e cartamodelli Principio di Cavalieri e solidi equivalenti Misura delle superfici e dei volumi	
10	*Geometria analitica nello spazio*	45
	Sistema di riferimento cartesiano Distanza tra punti nello spazio Vettori nello spazio Equazioni di un piano.Condizioni di parallelismo e perpendicolarità Equazioni di una retta.Condizioni di parallelismo e perpendicolarità Distanza punto-retta,punto-piano Superficie sferica nello spazio	

Francia 2^{de}		
Unità.	Contenuti	Pagine
2	*Funzioni affini.Problemi di primo grado*	24
	Definizione funzione lineare e funzione affine Coefficiente direttivo Crescenza e decrescenza Associare ad una retta l'espressione algebrica di una funzione affine Segno di una espressione affine Risoluzione di una disequazione di primo grado(anche graficamente)	
3	*Funzioni quadratiche. Problemi di secondo grado*	27
	Sviluppo e fattorizzazione di una espressione polinomiale Risoluzione di una equazione del tipo "prodotto uguale a 0" Definizione di funzione quadratica e curva rappresentativa Confronto dei quadrati di due numeri e soluzione di $x^2 = k$ Funzioni polinomiali di secondo grado.Curva rappresentativa	
4	*Funzioni inverse.Funzioni omografiche*	22
	Funzione inversa: definizione Curva rappresentativa:iperbole Confronto tra numeri Funzione omografica: definizione e rappresentazione Forma ridotta	
6	*Trigonometria*	20
	Il cerchio trigonometrico Coseno e seno	
10	*Basi di geometria*	23
	Coordinate nel piano Punto medio di un segmento Distanza tra punti del piano	
11	*Geometria nello spazio*	23
	Rappresentazione in prospettiva cavaliera Rette e piani nello spazio:definizione e proprietà Posizione relativa di rette e piani nello spazio	
12	*Rette nel piano*	23
	Retta non parallela agli assi Retta parallela agli assi Rette parallele e coefficiente direttivo Coordinate del punto di intersezione di due rette secanti	
13	*Vettori nel piano*	25
	Definizione e uguaglianza tra vettori Coordinate dei vettori Somma e prodotto per scalare Vettori collineari	

Francia $1^{re}s$		
Unità.	Contenuti	Pagine
1	*Secondo grado*	25
	Forma canonica equazione secondo grado Soluzione equazione di secondo grado Segno di un trinomio di secondo grado	
7	*Geometria piana*	29
	Equazione cartesiana di una retta Vettore direttore e proprietà Determinare l'equazione cartesiana di una retta Studio delle proprietà della retta tramite il vettore direttivo	
8	*Trigonometria*	25
	Sin e cos Angoli tra vettori Equazioni trigonometriche	
9	*Prodotto scalare*	31
	Prodotto scalare tra vettori Norma Prodotto scalare in un riferimento ortonormato Proprietà algebriche del prodotto scalare Applicazione al calcolo delle lunghezze e degli angoli Vettori ortogonali. Normale ad una retta Equazione del cerchio Formule trigonometriche: addizione e duplicazione	

Francia Ts		
Unità.	Contenuti	Pagine
8	*Rette e piani nello spazio-Vettori*	33
	Posizione relativa di rette e piani Vettori:definizione e operazioni Caratterizzazione vettoriale di rette e piani Vettori complanari e non Coordinate vettoriali di un punto Rappresentazione parametrica di una retta	
9	*Prodotto scalare nello spazio*	35
	Riferimento ortonormale nello spazio Definizione di prodotto scalare nello spazio Proprietà del prodotto scalare Ortogonalità nello spazio: tra una retta ed un piano Vettore normale Equazione cartesiana di un piano	