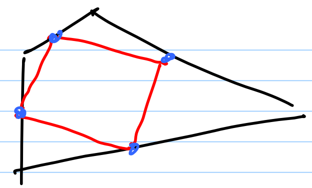
Scheda 2: Esperienze geometriche.

Titolo nota 16/02/2015

Come iniziare il percorso di studio della geometria? Seguendo le indicazioni contenute nel documento sul "metodo genetico", un buon inizio è di accumulare alcuni fatti sperimentali di carattere geometrico. Quali sono i caratteri principali di una "legge geometrica"?

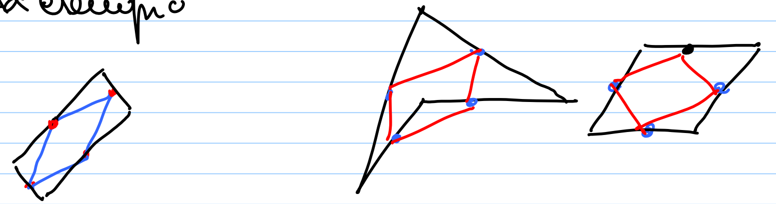
Un punto da sottolineare è che la geometria (così come la fisica) nello studio delle forme e delle dimensioni dei corpi, cerca le relazioni che sono invarianti. Nel linguaggio della fisica potremmo dire che studia le "leggi di conservazione". Vediamo qualche esempio.

Consideriamo un quadrilatero qualsiasi, e costruiamo i punti medi dei suoi lati. Ad esempio



e li congiungiamo. Come mostrato dalla figura, si ottiene un parallelogramma. Ciò che impressiona in questo esperimento è che questo risultato vale per ogni quadrilatero.

Usando esempio geogebra si fa facilmente alterare la forma del quadrilatero e verificare che il risultato non cambia.
Ad esempio

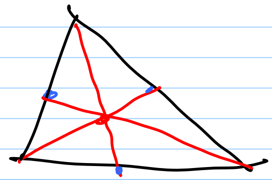


Con un po' più sofisticazione si può verificare, ad esempio nei casi semplici (il rettangolo od il parallelogramma) un'altra proprietà notevole del parallelogramma inscritto: l'area del parallelogramma inscritto è sempre la metà dell'estensione del quadrilatero in cui è inscritto.

Una indicazione bibliografica:
E. Maor, E. Jost Beautiful Geometry

Si tratta di un libro di "geometria visuale", che contiene magnifiche illustrazioni artistiche di fatti geometrici. Può essere usato come una riserva di "esperienze geometriche" da accumulare prima di sviluppare qualsiasi teoria.

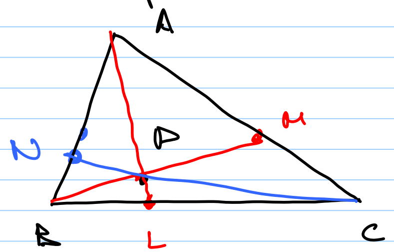
Veniamo ad un'altra proprietà. Partiamo da un caso semplice: lo studio delle mediane in un triangolo qualsiasi. Anche in questo caso farei osservare che vige un'altra "legge di conservazione": qualunque sia la forma del triangolo, le tre mediane passano tutte per il baricentro.



La stessa proprietà vale per le bisettrici e le altezze. Deformato il triangolo; le bisettrici e le altezze si deformano, ma

continuano a passare per uno stesso punto. Ci si può domandare che cosa accomuni questi tre casi. A questa domanda ha dato risposta nel 1697 il gesuita Giovanni Ceva, che si è posto il problema di caratterizzare le terne di punti L, M, N sui lati di un triangolo per cui le tre "ceviane" AL, BM e CN concorrono

nello stesso punto:



Perché le tre ceviane concorrino in uno stesso punto ci deve essere un vincolo sui

tre punti L, M, N. Questo vincolo è:

$$\frac{AN}{BN} \cdot \frac{BL}{CL} \cdot \frac{CM}{AM} = 1$$

Verifichiamo questa condizione nel caso delle mediane: in questo caso tutte le frazioni sono uguali ad 1, e tale è il loro prodotto. Meno ovvio è il

caso delle bisettrici. Vi invito a verificare la condizione di Ceva, in questo caso.
Il teorema di Ceva non appartiene agli Elementi di Euclide. Può essere dimostrato con la geometria euclidea, ma la dimostrazione non è semplicissima. Dimostreremo fra qualche lezione il teorema di Ceva, in

modo elementare col "Calcolo geometrico" che definiremo prossimamente. Il Calcolo geometrico è un'estensione del calcolo geometrico, dove si opera simultaneamente su punti e su vettori.
Questa lista di esperienze geometriche può essere prolungata indefinitamente.

Ne vedremo qualcun altro nelle prossime lezioni (ad esempio il teorema di Desargues). Vi invito a ripensare ad alcuni dei teoremi noti della geometria euclidea in questa luce di "teoremi di conservazione".