Scheda 3: Euclide

Titolo nota 19/02/2015

gio 19.02.2015
(ore 17-18.30)

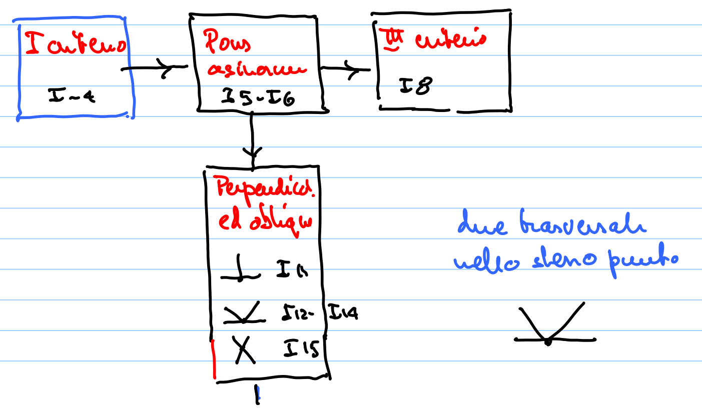
Nella scorsa lezione abbiamo accumulato, volutamente in modo casuale, un po' di fatti di esperienza geometrica (ognuno visto separatamente). La geometria nasce quando quando si comprendono i legami tra i diversi fatti sperimentali, così da poterli concatenare in ordine logico.

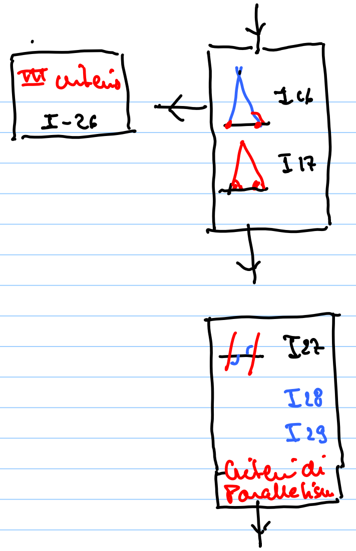
Oggi parliamo del metodo euclideo (dalla prossima settimana introdurremo un altro schema concettuale per spiegare gli stessi fatti, a cui daremo il nome, seguendo Peano, di Calcolo geometrico).

Il primo problema è di avere ben chiaro quali sono le architravi del metodo euclideo. A mio giudizio tali architravi sono:

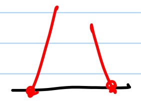
1. criteri di uguaglianza dei triangoli
2. criteri di parallelismo
3. criteri di similitudine
4. il teorema di Talete

Il punto è: come ci si arriva a questi capisaldi, a partire dalle nozioni comuni e dai postulati di Euclide. Il cammino logico essenziale che porta ai criteri precedenti può essere schematizzato nel modo seguente:

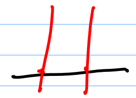


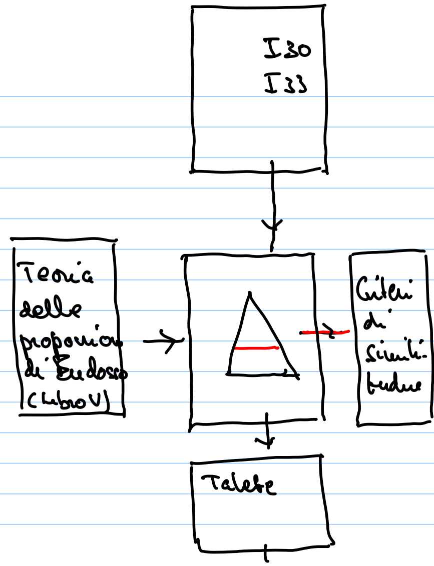


due trasversali
in punti differenti
non parallele

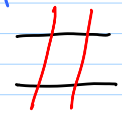


due trasversali
in punti differenti
parallele:

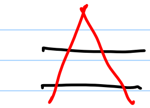


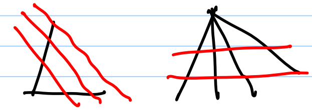


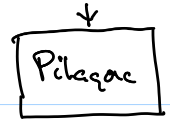
quattro trasversali a
due a due parallele
(parallelogrammi)



quattro trasversali
di cui due non parallel



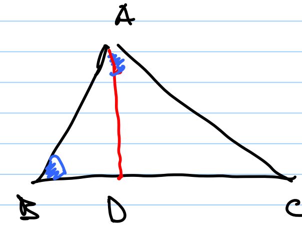




La mappa concettuale precedente in senso stretto termina con Talete. Una conseguenza immediata è il teorema di Pitagora, che per la sua importanza ricaviamo immediatamente.

Si passa da Talete a Pitagora (seguendo Pappo) semplicemente tracciando l'altezza

relativa all'ipotenusa:



abbiamo tre triangoli simili:

ABC
ABD
ADC

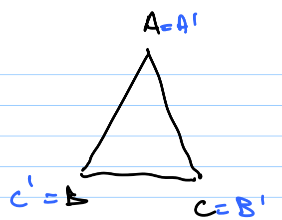
$ABD \sim ADC$: $\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC} \rightarrow AD^2 = BD \cdot DC$ Euclide 2

$ABD \sim ABC$: $\frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC} \rightarrow AB^2 = BD \cdot BC$ Euclide 1

Da Euclide 1, applicato due volte a ciascun cateto del triangolo grande, si ottiene:

$$AB^2 = BC \cdot BD$$
$$AC^2 = BC \cdot CD$$
$$AB^2 + AC^2 = BC \cdot (BD + CD) = BC^2$$ Pitagora

Esaminiamo di corsa alcuni punti di questa mappa concettuale. Ricordo che l'unica assunzione fatta all'inizio è il criterio LAL. Vediamo il primo punto: il pons asinorum. C'è una dimostrazione fulminante dovuta a Pappo. È dato il triangolo ABC, i cui lati AB e BC sono uguali. Consideriamo un secondo triangolo A'B'C' con A'=A B'=C e C'=B



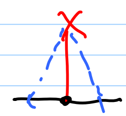
Questi due triangoli hanno:

$$A'C' = AB$$
$$A'B' = AC$$
$$\hat{A}' = \hat{A}$$

Quindi per il primo criterio: $\hat{C} = \hat{C}' = \hat{B}$.

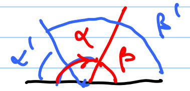
Come altro esempio, vediamo la dimostrazione dei tre teoremi successivi, relativi agli angoli formati da una o due oblique uscenti dallo stesso punto di una retta assegnata.

Il primo passo è la dimostrazione costruttiva che esiste una (ed una sola) obliqua perpendicolare.



L'unicità della perpendicolare segue dal quarto postulato di Euclide sull'uguaglianza degli angoli retti.

Il secondo passo è la dimostrazione di una "legge di conservazione": si confrontano gli angoli adiacenti formati da due oblique:



$\alpha+\beta=\alpha'+\beta'$

Per confronto col teorema precedente, ne ricavo

$\alpha+\beta=\pi$

Da queste osservazione deduce immediatamente il teorema sugli angoli opposti al vertice.
Perché dimostrare questo "ovvio" teorema?
Perché serve per la costruzione del teorema I.16 che è la chiave di volta dell'intera teoria delle parallele di Euclide.

Riferimenti bibliografici:

1) Libro I degli Elementi (traduzione in Bompiani)

2) Euclid's Elements of Geometry edito da R. Fitzpatrick

3) A.P. Kiselev Geometry Books Planimetry

4) J. Hadamard Leçons de Géométrie élémentaire (da Gallica)

5) C.M.H. Coxeter Introduction to Geometry

6) I. Mueller Philosophy of Mathematics and deductive Structure in Euclid's Elements