Scheda 4 : Dai postulati di Euclide a Talete

Abbiamo iniziato il nostro discorso sulla geometria ricordando due episodi significativi della storia delle scoperte scientifiche dell'Antichità: la misura dell'altezza della piramide di Cheope da parte di Talete e la stima delle dimensioni e delle distanze del Sole e della Luna da parte di Aristarco. Entrambe queste scoperte sfruttano l'idea di utilizzare l'ombra proiettata da un corpo (l'ombra della piramide nel caso di Talete e l'ombra della Terra in un'eclisse di Luna nel caso di Aristarco) per misurare distanze di corpi che ci sono inaccessibili. In entrambi i casi, per risalire dall'ombra alla distanza bisogna ricorrere al "teorema di Talete", cioè alla teoria delle figure simili, che si presenta quindi subito come uno dei capisaldi della geometria classica. Perché vale il teorema di Talete? In questa scheda cerchiamo di dare una risposta a queste domande seguendo fedelmente la strada tracciata da Euclide nei suoi Elementi. A mio giudizio la strada tracciata da Euclide è ancora la miglior strada che si possa seguire.

Il tema di fondo è il confronto di figure geometriche poste in luoghi differenti del piano o dello spazio. Euclide inizia dalle figure più semplici, i segmenti ed i triangoli. Fa vedere con una bella costruzione (descritta nelle prime tre proposizioni del Libro I) come si possano confrontare i segmenti, e passa quindi al caso dei triangoli. Qui inizia il nostro cammino verso il teorema di Talete.

Il punto iniziale è il "primo criterio di uguaglianza dei triangoli", brevemente indicato con LAL per ricordare che si riferisce al caso di due triangoli che hanno ordinatamente uguali due lati e l'angolo compreso. Nella proposizione I4, Euclide dimostra (utilizzando una nozione non meglio specificata di trasporto o sovrapponibilità dei triangoli) che i due triangoli coincidono, nel senso che hanno tutti gli altri

elementi (un lato e due angoli) uguali.
In una introduzione elementare alla geometria euclidea conviene prendere la proposizione I4 come un assioma, al pari del quarto postulato secondo cui tutti gli angoli retti sono uguali fra loro e del quinto postulato delle parallele, di cui parleremo in seguito. Questi tre postulati (il primo criterio, l'uguaglianza degli angoli retti e l'assioma delle parallele) esauriscono tutto

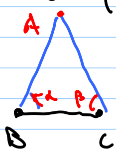
ciò che è necessario accettare inizialmente per dedurre in modo logico il teorema di Talete. Per semplicità di esposizione, conviene suddividere la trattazione di Euclide in quattro parti, che riguardano:

1. i criteri di uguaglianza dei triangoli
2. la teoria degli angoli formati da oblique
3. il confronto dei segmenti tagliati su due rette assegnate da due trasversali
4. la teoria della proporzionalità.

<u>punto 1</u>: criteri di uguaglianza.

Dal primo criterio LAL si deduce subito (o con la costruzione di Euclide in I5 o con l'argomento di simmetria per riflessione di Pappo) il "pons asinorum", cioè l'uguaglianza degli angoli alla base di un triangolo isoscele. Si può notare che questo teorema, oltre che a segnalare una notevole proprietà dei triangoli isosceli, serve anche come un primo criterio

di uguaglianza di angoli a distanza. Esso ci dà



una semplice condizione (l'uguaglianza dei lati AB e BC) che ci permette di concludere che gli angoli posti nei punti distanti B e C sono uguali.

Euclide fa subito vedere che vale l'inverso di questo teorema (proposizione I6), ma si può tranquillamente saltare questa osservazione e passare direttamente al terzo criterio di uguaglianza LLL (proposizione I 8). Euclide introduce questo criterio con una piccola costruzione (proposizione I 7), con cui fa vedere che due circonferenze di centri A e B e di raggio adeguato, che si intersechino da uno stesso lato della retta AB, possono avere un'unica intersezione. Su questa proprietà deduce immediatamente il terzo criterio, che enuncia in I 8. La sua dimostrazione è interessante (oltreché semplice) perché è la prima dimostrazione per assurdo.

Cambiando leggermente l'ordine di presentazione scelto da Euclide, a questo punto, se si vuole, si può dimostrare subito anche il secondo criterio di uguaglianza ALA, almeno in quella parte secondo cui due triangoli che hanno un lato uguale e i due angoli adiacenti anch'essi uguali, hanno anche tutti gli altri elementi uguali. Euclide dimostra questo criterio nella proposizione I 26. La ragione per posticipare così a

lungo la dimostrazione del secondo criterio è che, in I 26, Euclide dà una condizione più generale di uguaglianza, in cui si considerano due triangoli che hanno un lato uguale e due angoli uguali (non necessariamente adiacenti al lato considerato). Se ci si limita al caso degli angoli adiacenti, la dimostrazione può essere fatta immediatamente, perché si basa solo sui "pochi assiomi

come si evince dalla prima parte della dimostrazione di I 26. La dimostrazione della seconda parte può essere tranquillamente saltata, in quanto la si otterrà in seguito come semplice corollario della teoria delle rette parallele (da cui discende che la somma degli angoli interni di un triangolo vale sempre due retti).

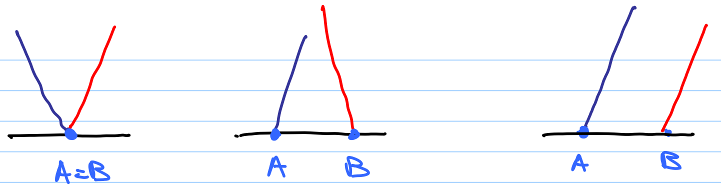
In conclusione: assumendo la validità

di I4 come nostro assioma iniziale, con quattro semplici proposizioni (I5, I7, I8 e prima parte di I26) si completa la dimostrazione dei tre criteri di uguaglianza: LLL, LAL, ALA. A questo punto si pone naturalmente la domanda: che cosa succede se i due triangoli hanno tre angoli uguali: AAA? Questa domanda apre la porta alla teoria dei triangoli simili

che porta al teorema di Talete.

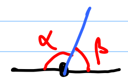
<u>punto 1</u>: angoli formati da oblique

Al centro del discorso c'è lo studio degli angoli formati da due oblique uscenti da due punti di una retta assegnata. Ci sono tre casi da prendere in considerazione, descritti nelle figure



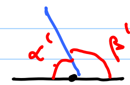
Questi tre casi si riferiscono al caso di due oblique distinte che escono da un medesimo punto; al caso di due oblique che escono da punti distinti e si intersecano; al caso di due oblique che escono da punti distinti e sono parallele.

L'osservazione centrale di Euclide, nel primo caso, è che ogni obliqua forma due angoli adiacenti α e β che



cambiano al cambiare dell'obliqua

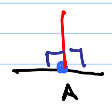
ma la cui somma è costante:

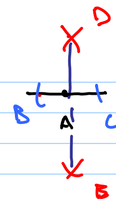


$$\alpha+\beta=\alpha'+\beta'.$$

Questa semplice osservazione è fatta da Euclide nella proposizione I13. La domanda successiva è:

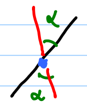
quanto vale il valore costante di queste somma? Sempre in I 13, Euclide conclude che il suo valore è due retti. Infatti, dal pons asinorum (e dal quarto postulato: tutti gli angoli retti sono uguali fra loro) segue facilmente che da ogni punto di una retta esce una ed una sola obliqua perpendicolare alla retta assegnata, per cui la somma precedente vale, per definizione, due retti.





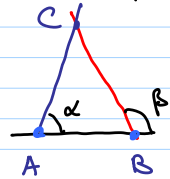
Questa perpendicolare può essere costruita con la costruzione indicata in figura, suggerita da Euclide nella proposizione I 9. In questa proposizione (e nelle due successive) il pons asinorum è utilizzato per costruire la bisettrice di un angolo, il punto medio e l'asse di un segmento. Fatto ciò, il pons asinorum esce di scena. Una semplice e notevole conseguenza della proposizione I 13 (secondo cui $\alpha+\beta=\pi$) è

la dimostrazione, in I 15, dell'uguaglianza degli angoli opposti al vertice. Questa osservazione chiude la parte dedicata agli angoli formati da oblique uscenti da uno stesso punto di una retta assegnata.



Al nostro bagaglio di dimostrazioni abbiamo aggiunto le proposizioni I 13 ed I 15, ed inoltre la costruzione di bisettrice, punto medio ed asse di un segmento. Siamo ora pronti ad affrontare la teoria delle parallele.

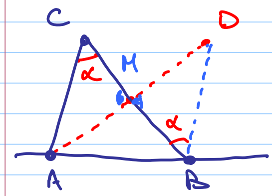
Il cardine della teoria sono le proposizioni I 16 ed I 17. Entrambe si riferiscono al caso di due oblique, uscenti da punti distinti A e B, che non sono parallele e perciò si intersecano in un punto C. Nella proposizione I 16, Euclide



dimostra che l'angolo β formato dalla seconda obliqua è maggiore dell'angolo α fatto dalla prima obliqua. Questa disuguaglianza è usualmente enunciata dicendo che l'ango.

lo esterno ad un triangolo è più grande degli angoli interni non adiacenti. La dimostrazione è molto bella, e per la prima volta mette in gioco la figura del parallelogramma. Infatti Euclide per confrontare due angoli posti in due luoghi diversi ha bisogno di trasportare uno dei due angoli nel vertice occupato dall'altro. La chiave per questo trasporto è la figura del parallelogramma.

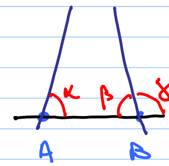
Non avendo ancora a disposizione la teoria delle parallele (e quindi dei parallelogrammi) Euclide si avvale di una costruzione equivalente, che permette di mettere in gioco l'assioma iniziale LAL. Euclide



considera il punto medio M di BC (costruzione che deriva dal pons asinorum!) e poi costruisce il simmetrico D di A rispetto ad M. In

questo modo ha costruito, senza dirlo, il parallelogramma ABCD (con D opposto ad A). Dalla costruzione segue subito che i triangoli AMC e BMD hanno due lati e l'angolo compreso uguali (perché gli angoli opposti al vertice sono uguali: proposizione I.15). Dunque per LAL tutti gli altri elementi sono uguali. Ciò permette di concludere che abbiamo trasportato l'angolo interno non adiacente $\hat{C}$ in B come mostrato in figura. Dopo il trasporto la disuguaglianza

angolare che interessa Euclide diventa evidente. La proposizione successiva I.17 è un semplice corollario, ottenuto mettendo insieme le proposizioni I.13 e I.16:



$$\alpha+\beta \overset{I16}{<} \beta+\gamma \overset{I13}{=} \pi$$

Per quanto semplice questa osservazione ha un ruolo fondamentale: dà una condizione necessaria di non parallelismo. Ci dice che due rette non parallele sono tagliate da una qualsiasi trasversale in modo tale che gli angoli α e β di figura sommano meno di due retti. La domanda successiva è: questa condizione sufficiente a garantire che le rette non sono parallele, cosicché si devono intersecare in qualche punto C (anche molto lontano da A e B)? Euclide accetta questa

condizione come sufficiente e la formula esplicitamente nel suo quinto postulato (delle "parallele"). Da questa accettazione nasce la geometria euclidea classica. A me sembra che la decisione di Euclide fosse la più naturale da prendere, e pertanto non metterei eccessiva enfasi sulle geometrie non-euclidee.

Completata la teoria delle rette non

parallele, Euclide è pronto a passare al caso successivo delle rette parallele. Questo caso è trattato da Euclide nelle proposizioni I 27, I 28 e I 29. (Le proposizioni dalla I 19 alla I 26 riguardano le disuguaglianze triangolari: per quanto interessanti, esse rappresentano una deviazione secondaria nel nostro cammino verso il teorema di Talete; possono essere omesse senza alcun danno, e posposte a quando se ne sentirà la necessità). La dimostrazione delle

tre proposizioni precedenti è elementare e coincide, in pratica, con l'enunciazione dei "criteri di parallelismo" sugli angoli alterni interni, corrispondenti o coniugati. In questo modo, dopo i "criteri di uguaglianza" dei triangoli ci siamo procurati anche i "criteri di parallelismo". Siamo a metà del nostro cammino verso il teorema di Talete. Salterei poi tranquillamente le proposizioni I 30 e I 31, per quanto elementari, e passerei alle principali conseguenze dei criteri di parallelismo, enunciate da Euclide nella proposizione I32: la somma degli angoli interni di un triangolo è pari a due retti. Tale enunciato è talmente semplice e la sua dimostrazione così elegante che non può essere, in alcun modo, omesso. Incidentalmente permette di dimostrare subito anche il caso più generale del criterio ALA.

<u>punto 3</u>: confronto di segmenti

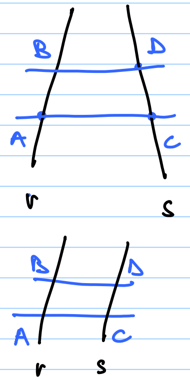
I criteri di parallelismo danno un criterio sicuro per trasportare e quindi confrontare angoli. Per quanto riguarda i segmenti, Euclide sa, per ora, confrontare solo i segmenti che stanno sulla stessa retta. La teoria delle parallele gli permette di sviluppare una tecnica efficace per confrontare segmenti che stanno

su rette distinte, parallele ed anche non parallele.

Lo studio inizia nel libro I, con le proposizioni 33 e 34, e continua nel Libro VI, con la teoria della similitudine, dopo che, nel Libro V, si sono poste le basi matematiche della teoria delle proporzioni. Infatti la relazione tra segmenti a cui punta Euclide è specificamente una relazione

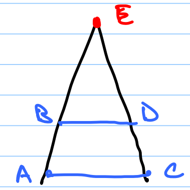
di proporzionalità (la forma più semplice di legge geometrica che connette coppie di grandezze, anche di natura diversa).

Nelle proposizioni I33 e I34 Euclide enuncia le principali proprietà dei parallelogrammi, che diventeranno lo strumento indispensabile per dare forma geometrica alla teoria delle proporzioni. La questione che ci deve affrontare è comprendere che relazione intercorre tra i segmenti tagliati, su due rette assegnate da due rette parallele, come indicato in figura.



Se le rette r ed s assegnate sono parallele, le proporzioni I 33 e I 34 ci dicono che i segmenti AB e CD sono uguali. In che misura differiscono quando r ed s si intersecano? La risposta però

essere data introducendo il punto E in cui le rette r ed s si intersecano, così da completare la figura precedente nella forma.



La risposta alla domanda posta è la legge di proporzionalità:

$$\frac{AB}{BE} = \frac{CD}{DE}$$

Questa risposta costituisce quello che Kiselev chiama il "lemma fondamentale" della teoria della similitudine. Per la sua dimostrazione (identica a quella fornita da

Hadamard) rimando alle fotocopie delle pagine del testo di Kiselev. In quelle pagine il cammino fino al teorema di Talete è molto ben tracciato, ed il mio suggerimento è di seguirlo abbastanza puntualmente. Sarebbe interessante confrontare più in dettaglio il cammino seguito da Kiselev con quello seguito da

Euclide nel Libro VI. Ma questo è lasciato alla buona volontà e all'interesse personale del lettore. Ritengo che questa discussione del Libro I di Euclide, unita alle note di Kiselev, sia sufficiente a delineare, in forma essenziale, la struttura logica su cui si basa l'intera geometria euclidea. Lascio a voi il compito di completare le parti mancanti; fare i riscontri necessari con le dimostrazioni

delle proposizioni segnalate del Libro I degli Elementi; analizzare in dettaglio il capitolo sulla "Similitudine" di Kiselev, ricostruendo una mappa concettuale delle tesi analoga a quella qui tracciata per il primo libro di Euclide.

∎