Scheda 5: Calcolo geometrico sui punti

Titolo nota 23/02/2015

lu 23.02.2015
ore 14.30 - 16.45

L'uso di un sistema di coordinate che permette di associare ad ogni punto di una figura nel piano le sue coordinate, rende possibile trascrivere in equazioni e disequazioni le sue proprietà. È questo il principio base della geometria cartesiana. Scopo di questa scheda è di indagare un po' più a fondo cosa significa "mettere in equazione" un dato problema geometrico. Un secondo scopo è di utilizzare questa indagine per introdurre il calcolo geometrico. Secondo Peano:

« il calcolo geometrico, in generale, consiste in un sistema di operazioni da eseguirsi su enti geometrici, analoghe a quelle che l'algebra fa sopra i numeri. Esso permette di esprimere con formule i risultati di costruzioni geometriche e di sostituire una costruzione di equazioni ad un ragionamento. Il calcolo geometrico presenta analogia con la geometria analitica; ne differisce in ciò, che mentre nella geometria analitica i calcoli si fanno sui numeri, in questa nuova scienza i calcoli si fanno sugli enti stessi »

(dalla prefazione del Calcolo geometrico di G. Peano, 1888).

Nella presente schema mi propongo di tradurre nella forma del calcolo geometrico sui punti le questioni della geometria euclidea che riguardano l'allineamento di punti, l'intersezione ed il parallelismo di rette e la similitudine dei triangoli. In altre parole tratteremo tutte quelle questioni della geometria euclidea che non fanno intervenire le nozioni di ortogonalità e di distanza. In

sintesi possiamo dire che studieremo quella parte della geometria euclidea che si può costruire senza il compasso (questa parte è denominata modernamente "geometria affine del piano euclideo). L'obiettivo che voglio raggiungere è far vedere che tutta questa parte della geometria euclidea si riassume in tre formule fondamentali:

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1. & A-B-C+D=0 \\ 2. & P=(1-t)A+tB \\ 3. & P=C+t(B-A) \end{array}} \quad t\in\mathbb{R}$$

Queste tre formule esprimono rispettivamente la "condizione del parallelogramma" (cioè la condizione che deve essere soddisfatta da quattro punti A,B,C,D al fine di costituire i vertici di un parallelogramma; l'equazione

della retta passante per due punti A e B; l'equazione della retta passante per il punto C e parallela alla retta AB.

Per introdurre queste formule ed il formalismo del calcolo geometrico, dove si opera sui punti piuttosto che sulle loro coordinate, parto dal seguente semplice problema. E' noto dalla geometria euclidea che dati tre punti non allineati A, B, C, esiste un unico punto D che completa il parallelogramma. Dal punto di vista di Cartesio, ciò significa che esistono due equazioni

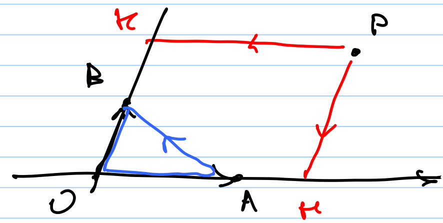
$$F(x_A\, y_A\, x_B\, y_B\, x_C\, y_C\, x_D\, y_D) = 0$$
$$G(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0$$

che determinano le coordinate di questo punto univocamente, note che siano le coordinate degli altri tre punti. La forma di queste equazioni dipende, a priori, dalla scelta del sistema di coordinate cartesiane utilizzate.

Coerentemente con la nostra decisione di non utilizzare la nozione di ortogonalità, in questa scheda faremo di sistemi di coordinate definiti da una coppia di rette

che si intersecano in un punto O, ma per il resto arbitrarie. Sceglieremo poi su ciascuna retta un segmento arbitrario, come in figura, che serve da unità di misura limitatamente alla retta prescelta. Nelle geometria "senza compasso" non si sa comparare segmenti che giacciono su rette distinte. Ad ogni punto P del piano risultano così associate due coordinate

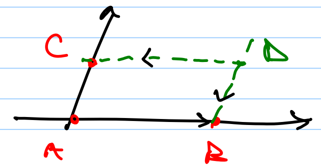
x_P e y_P costruite tracciando le parallele agli assi:



La coordinata x_P è il rapporto tra il segmento OH definito dalla proiezione ed il segmento

OA scelto come unità di misura sull'asse considerato. Lo stesso vale per le coordinate y_P. Insieme (x_P, y_P) sono dette "coordinate parallele" di P nel riferimento affine considerato. Per finire osserviamo che un riferimento affine (nel piano euclideo) è semplicemente un triangolo orientato.

Torniamo al problema del parallelogramma. Una prima scelta del sistema di coordinate è di far coincidere le coordinate con il triangolo A, B, C assegnato. In questo caso la situazione è descritta dalla figura



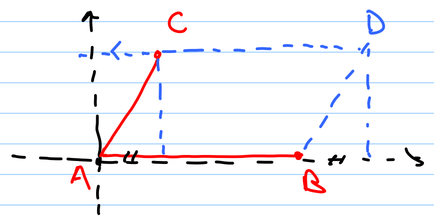
Per definizione delle coordinate parallele si vede subito che il punto D è individuato dalle equazioni

$$x_D - 1 = 0$$

$$y_D - 1 = 0$$

Queste sono le equazioni del parallelogramma in questo speciale sistema di riferimento.

Proviamo a cambiare coordinate. Prendiamo, contravvenendo alla decisione di non utilizzare la nozione di ortogonalità, gli assi indicati in figura:



In questo caso si vede

$$y_D = y_C$$
$$x_D - x_B = x_C - x_A = x_C$$

Dunque in questo caso le due funzioni F e G cercate hanno la forma

$$F = x_B + x_C - x_D = 0$$
$$G = y_C - y_D = 0$$

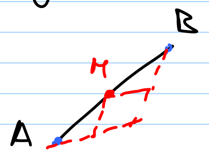
Questa dipendenza della forma delle equazioni che traducono una proprietà geometrica dalla scelta del sistema di coordinate è, in un certo senso, imbarazzante. Quali sono le vere equazioni che traducono la proprietà geometrica: i quattro punti (A, B, C, D) formano i vertici di un parallelogramma, con D opposto ad A.

Si pone il problema di vedere di scrivere le equazioni di un luogo geometrico in modo indipendente dalla scelta del sistema di coordinate. Solo in questo caso potremo dire che le nostre equazioni traducono veramente la proprietà geometrica. Per fare questo dobbiamo ricorrere ad una proprietà del parallelogramma che si possa scrivere facilmente in ogni di sistema di coordinate. Questa proprietà è

la proprietà delle diagonali di bisecarsi.
È del tutto ovvio che il punto medio di un segmento di estremi A e B è definito, in ogni sistema di coordinate affini, dalle equazioni

$$x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$$
$$y_M = \frac{1}{2}(y_A + y_B)$$

Basta considerare la coppia di triangoli simili disegnata in figura



dove i lati del triangolo sono, per ipotesi, paralleli ad un ipotetico sistema di riferimento affine che non è neppure disegnato

in figura. Le equazioni che definiscono il punto medio sono il primo esempio di "equazioni intrinseche" della geometria cartesiana, cioè di equazioni che hanno la stessa forma in ogni sistema di coordinate. È questo tipo di equazioni che è al centro dell'interesse del calcolo geometrico.

Comunque segue subito dall'osservazione

precedente che il punto D, di coordinate (x_D, y_D) in un arbitrario sistema di coordinate affini, è il vertice mancante del parallelogramma definito da (A, B, C) (con D opposto ad A) se e solo se

$$\frac{1}{2}(x_A + x_D) = \frac{1}{2}(x_B + x_C)$$

$$\frac{1}{2}(y_A + y_D) = \frac{1}{2}(y_B + y_C)$$

Riordinando i termini possiamo anche scrivere

$$x_A - x_B - x_C + x_D = 0$$

$$y_A - y_B - y_C + y_D = 0$$

Riscriviamo queste equazioni accoppiando ordinatamente le coordinate di ciascun punto, nella forma "ufficiale"

$$\begin{bmatrix}x_A\\y_A\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x_B\\y_B\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x_C\\y_C\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_D\\y_D\end{bmatrix}=0$$

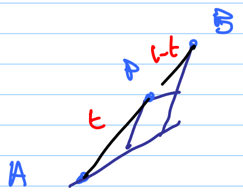
Seguendo le notazioni del calcolo geometrico scriviamo questa equazione, che vale in ogni sistema di coordinate, nella forma

$$A-B-C+D=0$$

Introdotto il concetto di forma intrinseca di equazioni che traducono una proprietà geometrica, proseguiamo nel nostro studio cercando di caratterizzare allo stesso modo la proprietà di allineamento di tre punti. Si tratta di una proprietà geometrica e quindi deve essere possibile scriverla in una forma che vale in ogni sistema di coordinate affini.

Iniziamo col caso in cui P sia compreso

tra A e B ineguali (equazione del segmento). La figura



rappresenta la naturale generalizzazione del caso del punto medio. I lati dei triangoli simili costruiti a partire dai punti A, B, P sono

paralleli agli assi di un ipotetico riferimento affine non disegnato in figura, la differenza col caso del punto medio è che ora il rapporto $\frac{AP}{AB}$ non è più un mezzo, ma un numero reale $t \in (0,1)$. Questo numero reale prende il nome di coordinata baricentrica normalizzata del punto sulla retta AB, considerata come asse affine, dove A è l'origine ed il segmento orientato AB è l'unità. Dal teorema di Talete abbiamo subito

$$x_P - x_A = t(x_B - x_A)$$

$$y_B - y_P = (1-t)(y_B - y_A)$$

Riordinando otteniamo:

$$x_P = (1-t)x_A + t x_B$$

$$y_P = (1-t)y_A + t y_B .$$

Siamo quindi autorizzati a scrivere questo sistema di equazioni nella forma

$$\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} = (1-t)\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}$$

e perciò a sostituire dette equazioni l'equazione intrinseca

$$P = (1-t)A + tB$$

Il significato di questa equazione è esattamente quello di riprodurre l'analoga relazione tra le coord. parallele dei punti in un qualsiasi sistema di coordinate affine. Fin qui abbiamo supposto P interno al segmento AB. I casi P esterno dalla parte di A oppure dalla parte di B, si trattano allo stesso modo scambiando, ad esempio, il ruolo di P e B (nel caso in cui P sia esterno dalla parte di B e quindi B interno ad AP). Si vede così facilmente che continuano a valere le stesse equazioni, a patto di considerare $t \in \mathbb{R}$ e di non restringere più $t \in (0,1)$. In particolare

$$P = (1-t)A + tB$$

descrive la retta che passa per A e B, con:

$t<0$: P esterno dalla parte di A

$t=0$: P coincide con A

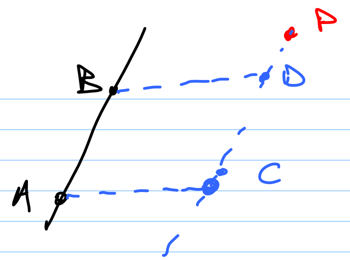
$0<t<1$: P interno al segmento AB

$t=1$: P coincide con B

$t>1$: P esterno dalla parte di B.

Dunque quella scritta è l'equazione intrinseca della retta che passa per due punti distinti.

Combiniamo ora le due equazioni trovate per scrivere l'eq. della retta parallela ad una retta data, passante per punto C fuori da tale retta.



Considero l'unico punto D che definisce il parallelogramma A, B, C, D (con D opposto ad A). Esso è definito, come sappiamo dall'eq. intrinseca:

$$A - B - C + D = 0$$

Il punto P ora appartiene alla retta CD. Dunque

$$P = (1-t)C + tD$$

Eliminiamo D:

$$P = (1-\cancel{t})C + t(B + \cancel{C} - A)$$

Dunque abbiamo:

$$P = C + t\,(B - A)$$