Scheda 6: Calcolo geometrico all'opera

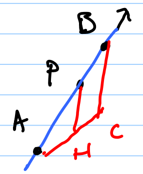
Titolo nota 26/02/2015

gio 26.02.2015
ore 17-18.30

Facciamo il punto della situazione. Tutto il discorso finora è ruotato attorno al teorema di Talete. All'inizio (scheda 1) abbiamo accettato questo teorema come un fatto di evidenza sperimentale, limitandoci a segnalare, in due esempi dovuti a Talete e ad Aristarco, quanto stupefacenti ed inattese potessero essere le sue conseguenze. Poi ci siamo posti il problema di capire quale fosse l'origine della validità del teorema di Talete. Nella scheda 3 abbiamo seguito Euclide nel percorso da lui tracciato che, partendo dai suoi cinque postulati e dal primo criterio di uguaglianza dei triangoli (LAL), ci ha portato fino a Talete. Infine, nella scheda 5, abbiamo cominciato ad "algebrizzare" Talete, adottando il punto di vista dei sistemi di coordinate (in generale affini), introdotto da Cartesio nel 1637. Per prima cosa abbiamo convertito il concetto di rapporto tra segmenti, così caro ad Euclide e così importante nella teoria greca delle proporzioni (una proporzione è, infatti, l'uguaglianza di due rapporti), nel concetto di coordinata affine

$$t = \frac{AP}{AB}$$

su una retta, essenziale nello schema concettuale di Cartesio. Poi abbiamo algebrizzato anche il teorema di Talete trasformando la proporzionalità fra i lati dei triangoli simili disegnati in figura nell'equazione



$$P = (1-t)A + tB$$

della retta passante per i punti distinti A e B. Questa equazione è quindi la forma algebrica moderna del teorema di Talete. Nel fare questo, abbiamo apportato una modifica importante allo schema cartesiano, imparando a scrivere le equazioni di un luogo geometrico in una forma che fosse indipendente dalla scelta del sistema di coordinate. È da questa ricerca della forma intrinseca delle equazioni dei luoghi geometrici che nasce il calcolo geometrico, come superamento dello schema della geometria analitica classica dove, troppo spesso,

ci si limita ad operare in un fissato sistema di coordinate. È evidente a tutti che dovendo risolvere uno specifico problema è bene adottare un sistema di riferimento adattato al problema. Ma quando si vogliono investigare le proprietà generali delle figure, nello spirito sintetico della geometria greca, è bene non dipendere da una scelta particolare del sistema di riferimento, cercando di tradurre la proprietà studiata in una forma che valga automaticamente

in un qualsiasi sistema di riferimento. È in questa direzione che l'Algebra geometrica (che, per il campo di applicazioni che noi studiamo, si identifica con l'Algebra lineare) completa e perfeziona il punto di vista della geometria analitica di Cartesio. Dai tempi di Euclide, l'evoluzione della geometria ha così seguito il seguente percorso

geometria sintetica di Euclide (300 B.C.) → geometria analitica di Cartesio (1637) → algebra geometrica o calcolo geometrico (~ 1890)

(Si veda: Crowe, A History of Vector Analysis).

È alla fine di questo percorso che il teorema di Talete si è trasformato nell'equazione

$$P=(1-t)A+tB.$$

A questa equazione abbiamo poi aggiunto le condizione di parallelismo

$$A - B - C + D = 0$$

e l'equazione delle rette parallele

$$P = C + t(B - A).$$

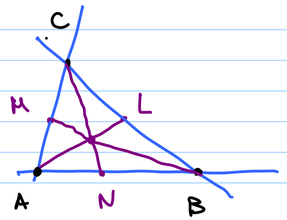
Queste tre equazioni esauriscono quanto di importante bisogna sapere nella geometria senza compasso (o geometria affine), cioè di quella parte della geometria che studia le questioni di

allineamento, concorrenza in un punto, parallelismo e similitudine, ma non le questioni legate ai concetti di ortogonalità e distanza.

Scopo di questa scheda è di mostrare, su alcuni esempi, quanto i metodi del calcolo geometrico siano potenti e semplici da usare. Vi invito a trattare gli stessi esempi con i metodi sintetici della geometria euclidea classica.

Esempio: (Mediane)

Utilizziamo l'eq. affine delle rette per dimostrare che le tre mediane di un triangolo ABC passano per un medesimo che divide ciascuna mediana nel rapporto 1:2.



Per dimostrare la tesi basta scrivere equazioni che definiscono i punti medi e le mediane:

punti medi:	mediane:
$L = \frac{1}{2}(B+C)$	AL: $P = (1-s)A + sL \quad 0<s<1$
$M = \frac{1}{2}(A+C)$	BM: $Q = (1-t)B + tM \quad 0<t<1$
$N = \frac{1}{2}(A+B)$	CN: $R = (1-u)C + uN \quad 0<u<1$

Eliminiamo i punti medi, ottenendo:

$$P = (1-s)A + \tfrac{1}{2} sB + \tfrac{1}{2} sC$$

$$Q = \tfrac{1}{2} tA + (1-t)B + \tfrac{1}{2} tC$$

$$R = \tfrac{1}{2} uA + \tfrac{1}{2} uB + (1-u)C$$

Le mediane si intersecano nello stesso punto se esistono tre valori dei parametri (s,t,u), compresi tra 0 ed 1, per cui

$$P = Q = R$$

I punti coincidono se e solo se hanno le stesse

coordinate affini in uno e quindi in tutti i riferimenti affini:

su C: $\quad \tfrac{1}{2} s = \tfrac{1}{2} t = 1-u$

su B: $\quad \tfrac{1}{2} s = 1-t = \tfrac{1}{2} u$

Ho quattro equazioni per tre parametri, ma il sistema è compatibile; la soluzione è

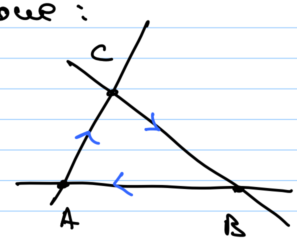
$$0 < s = t = u = \tfrac{2}{3} < 1$$

Esempio 2 (ceviane).

Spostiamo i punti L, M, N sui rispettivi lati in modo da non farli più coincidere col punto medio. I segmenti AL, BM e CN prendono ora il nome di ceviane (da Giuseppe Ceva, matematico pavese del 700). Per scelte arbitrarie le tre ceviane non si intersecheranno in un medesimo punto. Tuttavia questo può accadere per scelte speciali della terna (L,M,N).

Il problema è di caratterizzare queste terne.

Introduciamo un po' di notazione:



orientiamo i tre lati in maniera ciclica, per esempio oraria. Questa scelta definisce su ogni lato il punto che svolge il ruolo di origine e quello che svolge il ruolo di unità. Adesso sostituiamo alle equazioni dei punti medi le equazioni che definiscono i tre punti L, M, N di Ceva:

$$L = (1-\lambda) C + \lambda B \qquad 0 < \lambda < 1$$

$$M = (1-\mu) A + \mu C$$

$$N = (1-\nu) B + \nu A$$

Si tratta ora di dimostrare che le tre ceviane passano per un medesimo punto se e solo se

$$1 - (\lambda+\mu+\nu) + (\lambda\mu + \mu\nu + \nu\lambda) - 2\lambda\mu\nu = 0$$

ovvero

$$(1-\lambda)(1-\mu)(1-\nu) = \lambda\mu\nu$$

È chiaro che tale condizione è verificata per $\lambda = \mu = \nu = \frac{1}{2}$ (caso delle mediane)

<u>Esempio 3</u> (coordinate baricentriche del piano)

Dimostriamo adesso che dati nel piano tre punti distinti A, B, C, per ogni punto P esistono tre numeri reali (p, q, r) la cui somma è sempre pari all'unità

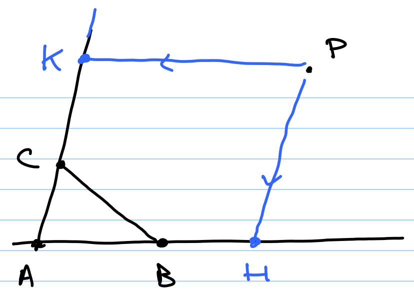
$$p + q + r = 1$$

tali che

$$P = pA + qB + rC .$$

I tre coefficienti (p, q, r) si chiamano le coord. baricentriche di P rispetto alla base di punti A, B, C.

Per ottenere questo risultato consideriamo la seguente figura, dove è mostrato il triangolo A, B, C, con due suoi lati prolungati, ed un generico punto P del piano:



Allora:

1. poiché P è il vertice di un parallelogramma si ha: $$P = H + K - A$$
2. poiché H e K appartengono alle rette individuate dalle due coppie di punti (A,B) e (A,C) si ha:

$$H = (1-s)A + sB$$
$$K = (1-t)A + tC \, .$$

Sostituendo:

$$P = (1-s)A + sB + (1-t)A + tC - A$$
$$= (1-s-t)A + sB + tC$$
$$= pA + qB + rC$$

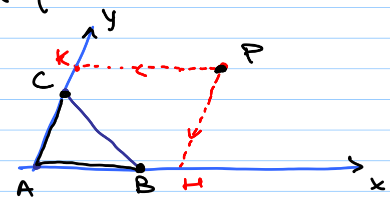
con
$$p = 1-s-t$$
$$q = s$$
$$r = t \, .$$

La tesi è dimostrata.

<u>Esempio 4</u> (legge di trasformazione delle coordinate affini)

Un'altra applicazione utile ed interessante delle coordinate baricentriche è per ottenere la relazione che lega le coordinate affini di uno stesso punto rispetto a due diversi riferimenti affini.

Per questo notiamo che un sistema di coordinate affini è completamente individuato da un triangolo ABC come indicato in figura:



Il vertice A è l'origine del sistema di coordinate affini ed i lati AB e AC rappresentano le unità di misura lungo gli assi coordinati x ed y. Le coordinate affini (x_P, y_P) del punto P sono le coordinate, rispetto alle unità di misura indicate, delle sue proiezioni H e K sugli assi coordinate.

Nell'esempio 3 abbiamo visto che i punti H, K e P erano legati ai punti A, B, C dalle relazioni

$$H = (1-s)A + sB$$
$$K = (1-t)A + tC$$

e

$$P = (1-s-t)A + sB + tC .$$

Scriviamo le prime due equazioni nelle coordinate affini dei punti H, K, A, B, C. Otteniamo subito

$$x_H = s \qquad y_K = t$$

perché le coordinate affini di A, B, C sono rispettivamente: $x_A = y_A = 0$, $x_B = 1$ e $y_C = 1$. D'altra parte $x_H = x_P$ e $y_K = y_P$. Dunque dall'ultima equazione otteniamo

$$P = (1 - x_P - y_P)A + x_P B + y_P C .$$

Questa equazione fornisce la relazione fra le coordinate affini di P e le sue coordinate baricentriche definite rispetto alla stessa base A, B, C.

Cambiamo ora sistema di coordinate, passando dalla base A, B, C alla base A', B', C'. Individueremo la vecchia base mediante le sue coordinate baricentriche rispetto alla nuova base A', B', C', scrivendo

$$\begin{aligned} A &= a_1 A' + a_2 B' + a_3 C' & \qquad & a_1 + a_2 + a_3 = 1 \\ B &= b_1 A' + b_2 B' + b_3 C' & \text{con} \qquad & b_1 + b_2 + b_3 = 1 \\ C &= c_1 A' + c_2 B' + c_3 C' & \qquad & c_1 + c_2 + c_3 = 1 . \end{aligned}$$

In questo modo otteniamo successivamente:

$$P = (1 - x_P - y_P)A + x_P B + y_P C$$
$$= (1 - x_P - y_P)(a_1 A' + a_2 B' + a_3 C') + x_P(b_1 A' + b_2 B' + b_3 C') + y_P(c_1 A' + c_2 B' + c_3 C')$$
$$= [a_1(1 - x_P - y_P) + b_1 x_P + c_1 y_P]A' + [a_2(1 - x_P - y_P) + b_2 x_P + c_2 y_P]B' + [a_3(1 - x_P - y_P) + b_3 x_P + c_3 y_P]C'$$
$$= (1 - x'_P - y'_P)A' + x'_P B' + y'_P C'.$$

Dunque la legge di trasformazione cercata è

$$x'_P = a_2(1 - x_P - y_P) + b_2 x_P + c_2 y_P = (b_2 - a_2)x_P + (c_2 - a_2)y_P + a_2$$
$$y'_P = a_3(1 - x_P - y_P) + b_3 x_P + c_3 y_P = (b_3 - a_3)x_P + (c_3 - a_3)y_P + a_3$$

Si tratta di una legge di trasformazione della forma

$$x'_P = a x_P + b y_P + e$$
$$y'_P = c x_P + d y_P + f$$

con

$$a = b_2 - a_2 \qquad b = c_2 - a_2 \qquad e = a_2$$
$$c = b_3 - a_3 \qquad d = c_3 - a_3 \qquad f = a_3 .$$

Questi sei parametri possono essere scelti ad arbitrio (per l'arbitrarietà delle coordinate baricentriche della base A, B, C rispetto alla base A', B', C'), a patto di assicurarsi che

$$ad - bc \neq 0 .$$

Infatti se risultasse $ad - bc = 0$, ci sarebbe un vincolo sulle coordinate baricentriche di A, B, C rispetto ad A', B', C' che implicherebbe che i punti A, B, C sono collineari. Non approfondiremo tuttavia questo aspetto della questione, accontentandoci di aver ottenuto la forma generale della legge di trasformazione delle coordinate affini. Sottolineo solo che in questo modo, molto diretto, abbiamo ottenuto il gruppo delle trasformazioni affini del piano

$$x' = ax + by + e \qquad ad - bc \neq 0$$
$$y' = cx + dy + f$$

di cui poi tutte le altre trasformazioni nel piano (quali traslazioni, rotazioni, riflessioni, similitudini, dilatazioni ecc.) sono sottogruppi particolari. Questo semplice esercizio tornerà quindi molto utile quando si intraprenderà lo studio delle isometrie. Da un altro punto di vista esso è una buona porta d'ingresso allo studio delle trasformazioni lineari nel piano cartesiano.

Esempio 5 (Eq. cartesiana della retta)

Torniamo ora a Cartesio. Riguardata la retta come il luogo dei punti P allineati con i punti distinti A e B, mi propongo di scrivere l'equazione di questo luogo geometrico nella forma

cartesiana

$$F(x_P, y_P; x_A, y_A; x_B, y_B) = 0$$

ossia come equazione che esprime il vincolo sulle coordinate (x_P, y_P) del generico punto del luogo che assicura che il punto è allineato con A e B. Sottolineo che voglio scrivere questa equazione in un arbitrario sistema di coordinate affini nel piano e non solo, come si fa usualmente, in un sistema monometrico di coordinate cartesiane ortogonali. Il problema è, dunque, di scrivere l'equazione, nel senso

di Cartesio, di una qualunque retta del piano in un qualunque riferimento affine.

Il processo è chiaro: si tratta di eliminare il parametro t dall'equazione della retta:

$$P=(1-t)A+tB$$

equivalente alla coppia di equazioni (DBH, p.14)

$$x_P = (1-t)x_A + t x_B$$
$$y_P = (1-t)y_A + t y_B$$

ovvero

$$x_P - x_A = t(x_B - x_A)$$
$$y_P - y_A = t(y_B - y_A)$$

Moltiplico "in croce" osservando che (x_B-x_A) e (y_B-y_A) non possono essere simultaneamente nulli perché A è distinto da B. Ottengo

$$(y_B-y_A)(x_P-x_A) = (x_B-x_A)(y_P-y_A)$$

Questa equazione è l'occasione per un

collegamento interessante con la teoria dei determinanti. Riscriviamo l'eq. sviluppando in (x_P, y_P):

$$(y_A - y_B)x_P - (x_A - x_B)y_P + (x_A y_B - x_B y_A) = 0$$

Questa eq. è difficile da ricordare e, per questo motivo, i matematici hanno inventato una notazione opportuna. Cominciamo dal termine noto, che fa comparire le coordinate dei punti A e B. Queste coord., come abbiamo visto possono essere messe in colonna o in riga, e quindi poi aggregati in una matrice 2×2

$$(A,B): \quad \begin{bmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{bmatrix}$$

L'eq. della retta suggerisce di associare a questa matrice il numero $(x_A y_B - x_B y_A)$, termine noto dell'equazione. Siamo quindi portati ad introdurre una nuova operazione che alla matrice 2×2 associa il numero detto. Questa operazione si chiama determinante:

$$\det : \begin{bmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{bmatrix} \longmapsto x_A y_B - x_B y_A = \begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{vmatrix}$$

È solo una regola mnemonica per ricordarsi l'espressione che interviene nell'eq. della retta. Passiamo poi agli altri coefficienti. Osserviamo che sono casi particolari dell'espressione precedente ottenuti nel modo seguente:

$$y_A - y_B = -(x_A y_B - x_B y_A)\Big|_{\substack{x_A = 1 \\ x_B = 1}} = -\begin{vmatrix} 1 & y_A \\ 1 & y_B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_A & 1 \\ y_B & 1 \end{vmatrix}$$

Allo stesso modo

$$x_A - x_B = (x_A y_B - x_B y_A)\Big|_{\substack{y_A=1\\ y_B=1}} = + \begin{vmatrix} x_A & 1 \\ x_B & 1 \end{vmatrix}$$

Ne risulta che l'equazione generale della retta si scrive:

$$x_P \cdot \begin{vmatrix} y_A & 1 \\ y_B & 1 \end{vmatrix} - y_P \begin{vmatrix} x_A & 1 \\ y_A & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{vmatrix} = 0$$

Osservo che questa equazione fa intervenire le seguenti espressioni:

$$\begin{bmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{bmatrix}$$

Possiamo perciò vedere il primo membro dell'eq. della retta come un numero associato a questa matrice 3x3 che fa intervenire, in maniera simmetrica, i tre punti P, A, B di cui si studia l'allineamento. Chiamiamo ancora questo numero il determinante della matrice: poniamo

$$\begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} := x_P (y_A - y_B) - y_P (x_A - x_B) + 1 (x_A y_B - x_B y_A).$$

Qui si riconosce la regola di sviluppo di un determinante, su cui non mi soffermo. La condizione, dal punto di vista geometrico, è che la condizione generale di allineamento di tre punti è:

$$\begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Esercizio 1 (da DBM, p. 93, esercizio 78).

Verificare che i punti $\left(1;-\frac{5}{2}\right)=A$, $B\,(2;-2)$, $C(-4;-5)$ sono allineati.

solut. 1:

senza neanche precisare il sistema di riferimento:

$$\begin{array}{c} A \rightarrow \\ B \rightarrow \\ C \rightarrow \end{array} \begin{vmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} + \frac{5}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -4 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= +3 + 15 - 18$$

$$= 0$$

soluzione 2:

scrivo l'equazione della retta passante per (A,B):

$$P = (1-t)A + tB$$

La traduco in coordinate, senza neanche precisare il sistema di coordinate: basta usare un unico sistema di coordinate per tutti i punti:

$$x_P = (1-t)\,1 + t\,(2) = 1+t$$

$$y_P = (1-t)\left(-\frac{5}{2}\right) + t\,(-2) = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}t$$

Adesso sostituisco le coord. di P e mi chiedo se esiste un valore di t per cui entrambe le equazioni sono verificate:

$$-4 = 1+t \quad \Rightarrow \quad t=-5$$

$$-5 = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}t \quad \Rightarrow \quad t=-5 \qquad \text{Sì}$$

soluzione 3:

uso l'equazione generale della retta

$$ax + by + c = 0$$

ed impongo che A, B, C appartengano alla retta. Arrivo ad un sistema di 3 eq. in 3 incognite, la cui condizione di risolubilità è proprio la condizione di allineamento iniziale.

Esercizio 2 (DBM, p. 98 es. 4: equazioni parametriche di una curva)

Scrivere in forma parametrica la retta di equazione $4x-2y=5$.

Scelgo $x_A=1$. Trovo: $y_A=-\frac{1}{2}$

Scelgo $x_B=-1$. Trovo: $y_B=-\frac{9}{2}$

Ho trovato due punti che stanno sulla retta (naturalmente bisogna prima aver discusso la corrispondenza fra rette del piano ed equazioni di primo grado. Per una ulteriore discussione si può vedere:

L.P. Eisenhart, Coordinate geometry, Cap. I, Sez 1.)

Per finire:

$$P=(1-t)A+tB$$

che traduciamo in coordinate

$$x_P=(1-t)1+t(-1) \leftarrow \text{coordinate } x$$

$$y_P=(1-t)\left(-\frac{1}{2}\right)+t\left(-\frac{9}{2}\right) \leftarrow \text{coordinate } y$$

<u>Esercizio 3</u> (condizione di parallelismo)

Volendo scrivere l'eq. della retta che passa per C ed è parallela alla retta che passa per A e B, osservo che la retta cercata è la retta che passa per C e D dove

$$D=B+C-A$$

Dunque:

$$\begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_C & y_C & 1 \\ x_D & y_D & 1 \end{vmatrix}=0$$

dove

$$x_D=x_B+x_C-x_A$$
$$y_D=y_B+y_C-y_A.$$

È facile dimostrare la regola di parallelismo:

due rette

$$r: \quad ax+by+c=0$$
$$r': \quad a'x+b'y+c'=0$$

(in un qualunque sistema di riferimento affine) sono parallele se e solo se esiste un numero reale k per cui

$$a' = ka$$
$$b' = kb$$

cioè se i coefficienti (a,b) e (a',b') sono proporzio-nali, ovvero se e solo se (per eliminazione di k)

$$ab' - a'b = 0.$$

Qui finisce la parte sul metodo di Cartesio in coordinate affini (ovvero, in un piano affine).

__Esercizio 4__ (Punti medi dei lati di un quadrilatero)

In un piano cartesiano, riferito come al solito ad un sistema di assi ortogonali, siano dati i quattro punti di coordinate

$$A(-1,2) \quad B\left(\sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{7}}\right) \quad C(3,5) \quad D(\sqrt{2},\sqrt{2}).$$

Si consideri il quadrilatero avente come vertici questi quattro punti (nell'ordine naturale A,B,C,D). Si dimostri che i punti medi dei lati AB, BC, CD e DA sono i vertici di un parallelogramma. Si dimostri che il risultato non dipende dal valore delle coordinate (e quindi dalla posizione) dei quattro punti A,B,C,D. Cosa cambia se invece di dare le coordinate in un sistema di assi ortogonali le si dà in un sistema di coordinate oblique? Scrivere l'equazione della diagonale AD nel sistema di coordinate che si preferisce.

□