Scheda 7: Calcolo geometrico sui segmenti

Titolo nota 02/03/2015

lu 2 marzo 2015
ore 14.30 - 16.00

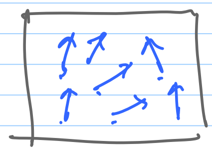
Il calcolo geometrico sui punti è insufficiente a trattare la geometria euclidea nella sua completezza. Esso infatti non ingloba, nella forma in cui è stato presentato, le nozioni di distanza e di perpendicolarità. In questa seconda parte del calcolo geometrico ne vediamo il completamento (almeno parziale), introducendo accanto al calcolo geometrico sui punti il calcolo geometrico sui segmenti orientati. Anche questo calcolo è diviso in due parti: una parte affine dove la teoria delle parallele è utilizzata per introdurre le operazioni algebriche sui nuovi enti; ed una parte metrica dove si "algebrizza" il teorema di Pitagora nella nuova operazione di prodotto scalare. In altri termini, ancora una volta i due teoremi centrali di Talete e di Pitagora sono "algebrizzati", Talete nelle operazioni di somma e moltiplicazione per un numero; Pitagora nel prodotto scalare.

<u>punto c</u>: breve nota storica

Il calcolo geometrico sui punti che vi ho presentato coincide, in pratica, col "calcolo baricentrico" di Moebius, che ha a sua volta un'origine fisica: la teoria dei sistemi di forze (in particolare parallele) agenti su corpi rigidi. Tale calcolo è stato formalizzato attorno al 1828. Il concetto di vettore come grandezza intrinseca è successivo e viene, paradossalmente dall'algebra: è il problema dei numeri ipercomplessi che porta Hamilton ad introdurre i quaternioni, di cui i vettori sono solo un caso particolare. L'utilizzo in geometria dei vettori è dovuto a H. Grassmann, che è il vero fondatore dell'algebra geometrica, che ha costruito un sistema algebrico completo per trattare punti, segmenti, parallelogrammi e parallelepipedi orientati. Nel linguaggio geometrico, segmenti, parallelogrammi e parallele tripedi orientati prendono il nome di vettori, bivettori e trivettori. Quindi il calcolo di Grassmann può essere pensato come un calcolo sui multivettori (questo calcolo prende il nome di: algebra esterna). Noi tratteremo soltanto il caso dei punti e dei vettori. Il calcolo sui punti è stato presentato nella scheda precedente. Il calcolo sui vettori è oggetto di questa scheda.

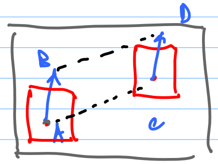
punto 2: dalle parallele alle traslazioni.

Introduciamo come nuovo elemento geometrico il segmento orientato o coppia ordinata di punti (A,B). Rispetto ad Euclide c'è un primo progresso essenziale: la considerazione dell'orientazione. È solo considerando segmenti orientati che è possibile definire su di loro delle operazioni algebriche (o di composizione) che godono di tutte le proprietà desiderate (tipiche delle operazioni sui numeri). Un segmento orientato sarà chiamato "vettore geometrico" e sarà sempre pensato come applicato alla sua origine. La nozione di vettore applicato è poi estesa nella nozione di campo vettoriale. Si tratta di una nozione derivata dalla Ricci che ha un grande utilizzo anche in Geometria. Il campo vettoriale, in senso geometrico, è l'attribuzione di un vettore applicato ad ogni punto del piano.



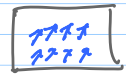
L'idea di campo ci permette di dare una nuova interpretazione della nozione di parallelismo tipica della geometria euclidea.

Mediante la nozione di parallelismo possiamo confrontare fra di loro vettori applicati a punti distinti. Diremo che il vettore $\vec{AB}$ (applicato in A) è uguale al vettore $\vec{CD}$ (applicato in C) se i quattro punti A, B, C, D che definiscono i due vettori applicati costituiscono i vertici di un parallelogramma (con D opposto ad A), e quindi se



$$A - B - C + D = 0$$

In altre parole l'uso del concetto di campo vettoriale ci dà modo di effettuare una nuova interpretazione (algebrica, come relazione di uguaglianza) del concetto di rette parallele di Euclide. La principale conseguenza è che la nozione di parallelismo (o di trasporto di vettori) permette di selezionare una classe principale di campi vettoriali: i campi vettoriali costanti:



In geometria i campi costanti sono detti traslazioni. Indicheremo

con $\vec{v}$ la generica traslazione: è il campo e quindi non coincide con nessuno dei suoi valori (o vettori applicati). Il valore del campo nel punto A, cioè $\vec{v}(A)$, è un segmento orientato e potrà perciò essere indicato con

$$\vec{v}(A) = \vec{AB}$$

(Nota: quello che io chiamo campo costante o traslazione $\vec{v}$, per voi è usualmente chiamato

vettore libero, definito come una classe di equivalenza di vettori geometrici che verificano la relazione di uguaglianza definita dal parallelismo. Personalmente trovo più utile e concreta la nozione di campo vettoriale costante di quella, puramente algebrica, di classe di equivalenza).

In conclusione abbiamo trovato un secondo modo per "algebrizzare" la nozione geometrica di parallelismo: la definizione dei campi vettoriali costanti o traslazioni.

punto 3: l'algebra delle traslazioni.

Il vantaggio di questo punto di vista, inizialmente abbastanza astratto, è di suggerire immediatamente un sistema naturale di operazioni sui segmenti orientati. La prima

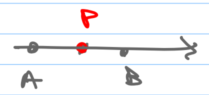
operazione è la somma. Il modo più naturale è di considerare la composizione (in catena, cioè una dopo l'altra) delle traslazioni. È semplice far vedere che tale operazione preserva la classe dei campi costanti (operazione interna) ed ha carattere commutativo. Con una semplice figura si mostra che si riduce alla regola della diagonale del parallelogramma;

$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$: $\vec{w}(A) = \vec{u}(A) + \vec{v}(A)$

dove $\vec{w}(A)$ è la diagonale del parallelogramma costruito su $\vec{u}(A)$ ed $\vec{v}(A)$.

Si vede anche subito che tale operazione gode della proprietà associativa tipica della somma fra numeri. Per far sì che ci sia anche l'elemento neutro è poi necessario introdurre la nozione di campo nullo: $\vec{0}$.

Un secondo pilastro della teoria geometrica di Euclide era il concetto di rapporto di segmenti (senza il quale non è possibile formulare il concetto di proporzione e quindi il teorema di Talete). Abbiamo già visto che questo concetto era stato "algebrizzato" da Cartesio nel concetto di coordinata del punto P della retta rispetto al riferimento affine definito dall'origine A e dall'unità AB



$x_P = \frac{AP}{AB}$

Adesso lo stesso concetto viene algebrizzato in un secondo modo, come operazione di moltiplicazione di un vettore geometrico per un numero:

$$AP = x_P \cdot AB$$

Il concetto di rapporto tra segmenti di Euclide è riletto come operazione algebrica di moltiplicazione di un vettore geometrico per un numero reale. Valgono tutte le proprietà che ci interessano (tipiche della moltiplicazione tra numeri). Si nota subito che questa operazione, originariamente definita sui vettori applicati, può essere estesa ai campi vettoriali (punto

per punto) e permette la classe dei campi costanti. Nasce così la nozione di spazio vettoriale delle traslazioni. (Incidentalmente, tale nozione è stata introdotta da Peano nel libro che vi ho indicato). La conclusione di questo discorso è che è la stessa cosa dire che nella geometria euclidea sono definite le nozioni di parallelismo e di rapporto

tra segmenti allineati oppure dire che il piano euclideo è uno spazio a cui è associato uno spazio vettoriale di traslazioni che operano sullo spazio in quanto ad ogni punto A associano il punto B tale $v(A) = AB$. Questa è la definizione moderna di piano affine. Le radici di questo concetto sono pertanto molto antiche.

Se qualcuno fosse interessato a una discussione più approfondita (da un punto di vista tecnico) relativa al passaggio dalla geometria euclidea alla nozione di piano affine, indico due riferimenti bibliografici:

G. Choquet — L'insegnamento della geometria — Feltrinelli

J. Dieudonné — Algebra lineare e geometria — Feltrinelli

Entrambi i libri sono rivolti all'insegnamento della geometria nei licei. Metterò sul sito le pagine delle introduzioni di questi due libri.