Esercizio 1

Determinare tutte le soluzioni intere della congruenza:

$$97^x \equiv 184 \pmod 9.$$

Esercizio 2

Si consideri il sistema lineare nelle incognite x, y a coefficienti nel campo Z_p (p primo):

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$$

Discutere a variare del campo Z_p le soluzioni del sistema.

Esercizio 3

Sia f: $R^3 \to R^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f(x,y,z) = (3y,\ 5x - 2z,\ x + y + z).$$

Determinare la matrice associata a f rispetto alla base S= {(0,1,0), (1,1,1), (1,0,0)}, fissata sia nel dominio che nel codominio.

Esercizio 4

Nello spazio vettoriale E delle matrici 2x2 a coefficienti reali si considerino i sottoinsiemi

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : b^2 = c^2 \right\} \quad e \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : c = b + d \right\}$$

Dire se sono sottospazi di E e in caso affermativo determinarne la dimensione e una base.

(Per gli esercizi: <u>giustificare le risposte</u>)

Esercizio 1

Nel gruppo S_4 delle permutazioni su 4 elementi si consideri la permutazione

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determinare l'ordine di τ.

b) Determinare τ^{-1}

c) Determinare, se esiste, un elemento di S_4 il cui ordine sia, rispettivamente,3, 4, 5, 6.

Esercizio 2

Risolvere la congruenza $2^8 x \equiv 5^{13} \pmod 7$.

mi f(x) di V di grado ≤ 2 tali che $f(1)=f(-1)$. Determinare tutti i polinomi di S.

Esercizio 3

Sia $f: R^3 \to R^3$ l'applicazione lineare così definita

$$f(x,y,z) = (2x-2z,\ x-z,\ x-z).$$

Determinare gli autovalori e gli autovettori di f. Si chiede se f è diagonalizzabile.

Esercizio 4

Sia $f: R^3 \to R^4$ l'applicazione lineare la cui matrice rispetto alle basi standard è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & K \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & K & 1 \end{pmatrix}$$

Determinare gli eventuali valori del parametro reale k per i quali $\underline{v} = (1,0,0,k) \in \mathrm{Im}\, f$.

Esercizio 1

Sia $A = Z_4 \oplus Z_{18}$ l'anello di tutte le coppie (a,b) con $a \in A$ e $b \in B$, con le operazioni + e $\cdot$ definite da:

$$(a,b) + (a',b') = (a+a',b+b')$$
$$(a,b) \cdot (a',b') = (aa',bb')$$

a) Determinare in A un esempio (se esiste) di un elemento invertibile ($\neq(1,1)$) e di un elemento ($\neq(0,0)$) non invertibile.
b) Caratterizzare tutti gli elementi invertibili in A.
c) Determinare (se esiste) un esempio di un divisore dello zero in A.
c) Dire se (A,+) è un gruppo ciclico.

Esercizio 2

Determinare tutte le soluzioni intere del sistema di congruenze:

$$23x \equiv 27 \pmod 5$$
$$18x \equiv 40 \pmod 7$$

Esercizio 3

Sia V il sottospazio di R^4 generato dai vettori $\{\underline{u}=(1,1,1,1), \underline{v}=(0,1,0,1), \underline{w}=(2,1,0,0)\}$

a) Determinare l'equazione (o le equazioni) che devono verificare le coordinate x, y, z, t di un vettore $\underline{a}$ di R^4 affinchè sia $\underline{a} \in V$.

b) Dare un esempio, se esiste, di un vettore $\underline{b}$ di R^4 tale che $\langle\underline{b}\rangle \oplus V=R^4$.

c) Dare un esempio , se esiste, di un sottospazio vettoriale S di R^4 di dimensione 2 tale che $S \oplus V = R^4$.

Esercizio 4

Dire per quali valori del parametro reale t la matrice

$$A= \begin{matrix} t & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{matrix}$$

è diagonalizzabile (su R).

Esercizio 1

Determinare tutte le soluzioni intere di

$$30^x \equiv 139 \pmod{13}$$

Esercizio 2

Nel gruppo delle permutazioni su 8 elementi si consideri la seguente permutazione

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 6 & 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

a) Determinare l'ordine di ρ.
b) Determinare gli elementi del gruppo ciclico H generato da ρ.
c) Determinare tutti i generatori di H.

Esercizio 3

Si consideri il sistema lineare a coefficienti reali nelle incognite x e y:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - ky = 2 + k \\ x + (k-3)y = 4 - k \end{cases}$$

Discutere, al variare del parametro reale k, le soluzioni del sistema.

Esercizio 4

Nello spazio vettoriale E delle matrici 2x2 a coefficienti reali si considerino i sottoinsiemi

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a - b = a + c = 1 \right\} \text{ e } W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a - b = a + c = 0 \right\}$$

Dire se sono sottospazi di E e in caso affermativo determinarne la dimensione e una base.

Esercizio 1

Sia $A = Z_2 \oplus Z_{36}$ l'anello di tutte le coppie (a,b) con $a \in A$ e $b \in B$, con le operazioni + e $\cdot$ definite da:

$$(a,b) + (a',b') = (a+a',b+b')$$
$$(a,b) \cdot (a',b') = (aa',bb')$$

a) Determinare in A un esempio (se esiste) di un elemento invertibile ($\neq(1,1)$) e di un elemento ($\neq(0,0)$) non invertibile.
b) Caratterizzare tutti gli elementi invertibili in A.
c) Determinare (se esiste) un esempio di un divisore dello zero in A.
c) Dire se (A,+) è un gruppo ciclico.

Esercizio 2

Determinare tutte le soluzioni intere del sistema di congruenze:

$$28x \equiv 32 \pmod 5$$
$$20x \equiv 25 \pmod 7$$

Esercizio 3

Sia V il sottospazio di R^4 generato dai vettori $\{\underline{u}=(1,1,1,1), \underline{v}=(0,0,1,1), \underline{w}=(2,0,0,1)\}$
a) Determinare l'equazione (o le equazioni) che devono verificare le coordinate x, y, z, t di un vettore $\underline{a}$ di R^4 affinchè sia $\underline{a} \in V$.

b) Dare un esempio, se esiste, di un vettore $\underline{b}$ di R^4 tale che $<\underline{b}> \oplus V=R^4$.

c) Dare un esempio , se esiste, di un sottospazio vettoriale S di R^4 di dimensione 2 tale che $S \oplus V = R^4$.

Esercizio 4

Dire per quali valori del parametro reale t la matrice

$$A= \begin{matrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & t & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{matrix}$$

è diagonalizzabile (su R).

ESAME DI MATEMATICA DISCRETA
15 ottobre 1996

1) Si consideri l'anello $A = \mathbf{Z_5}[x]$ costituito dai polinomi a coefficienti in $\mathbf{Z_5}$ e in esso l'elemento $p(x) = x^4 + 1$; sia B l'anello delle classi di resto rispetto alla congruenza modulo p(x), cioè alla relazione di equivalenza definita da:

(f,g $\in$ A) $\quad f(x) \equiv g(x) \quad \Leftrightarrow \quad x^4 + 1$ divide $f(x)-g(x)$.

a) Determinare quanti sono gli elementi di B.

b) Dire se l'elemento [x] è invertibile in B rispetto al prodotto e, in caso affermativo, determinarne l'inverso.

c) Dire se esistono in B divisori dello zero e, in caso affermativo, darne un esempio.

d) Dire se B è un campo.

2) Determinare tutte le soluzioni intere del sistema di congruenze

$$\begin{cases} 17x \equiv 1528 (\bmod 15) \\ 26x \equiv 16 (\bmod 21) \end{cases}$$

3) Sia f: $\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ una applicazione lineare che verifichi le seguenti due condizioni:

- er f sia il sottospazio $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 : x-z = z+y+t = 0\}$
- sottospazio V = < (0,0,1,0), (1,0,0,2)> sia l'autospazio relativo all'autovalore 2.

a) ninare l'immagine di f.

b) il vettore **b** = (1,1,1,2) appartiene a Im f.

c) inare la matrice associata a f rispetto alla base {(1,-1,1,0), (0,1,0,-1), (0,0,1,0), (1,0,1,2)}.

4) tere la risolubilità del seguente sistema di tre equazioni in quattro incognite, al v arametri reali α e β:

$$\begin{cases} x + y + 2z + \alpha w = \beta - \alpha + 1 \\ 2x + 2y + 4z + \alpha w = \beta - \alpha + 2 \\ -x - y - 3z + w = -1 \end{cases}$$

ESAME SCRITTO DI MATEMATICA DISCRETA - 2 LUGLIO 1999

1) Si determinino i valori del parametro reale h per i quali il sottoinsieme S di R^3 costituito dai vettori

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

le cui componenti x, y, z soddisfanno la relazione

$$x + y + z = 1 - h^2$$

è un sottospazio di R^3. Per tali valori si determini un sistema (finito) di generatori per S.

2) Si determinino i valori del parametro reale k per i quali è risolvibile il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = k - 1 \\ 2x - ky + z = 0 \\ x - y = k \end{cases}$$

e per $k = 1$ si tovino le soluzioni.

3) Sia Z_3 il campo delle classi di resti modulo 3 e sia $Z_3[x]$ il relativo anello dei polinomi.
i) Per quali valori del parametro reale a il polinomio $f(x) = x^4 + ax^2 + 1 \in Z_3[x]$ ammette radici in Z_3?
ii) Per quali valori di a lo stesso polinomio è riducibile in Z_3?
Si giustifichino le risposte.

4) Sia Z_3 il campo delle classi di resti mod.3 e sia $G = GL(2, Z_3)$ il gruppo delle matrici quadrate di ordine 2 invertibili a coefficienti in Z_3.
i) Si determinino i periodi di

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e si dica , giustificando la risposta, se G è abeliano.
ii) Per quali valori di t la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

appartiene al sottogruppo $< a >$, generato da a ?

ESAME SCRITTO DI MATEMATICA DISCRETA - 23 FEBBRAIO 1999

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

1. Si determini un'applicazione lineare $f : R^3 \to R^3$ tale che :

i)

$$ker\ f = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >,$$

ii) un autovalore sia uguale a 2 e un autovettore ad esso relativo sia

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

iii) Si determini la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica.

2.

a) Si provi che:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall n \geq 0.$$

b) Si mostri che l'insieme

$$H = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2t & 0 & 1 \end{pmatrix} \ | \ t \in Z\}$$

è un gruppo abeliano rispetto al prodotto righe per colonne.

c) Si dica se H è ciclico e, in caso affermativo, se ne determini un generatore.

3. Si risolva, al variare del parametro reale k, il seguente sistema lineare a coefficienti nel campo R:

$$\begin{cases} kx + y + z & = 1\text{-}k \\ x + 2ky + z & = 0 \\ x + y + kz & = 1 \end{cases}$$

4. Per quali valori del parametro ~~reale~~ intero k ammette soluzioni la congruenza lineare

$$3x \equiv 5 \ (mod\ k) \ ?$$

ESAME SCRITTO DI MATEMATICA DISCRETA - 26 GENNAIO 1999

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

1. a) Si risolva il seguente sistema di congruenze lineari:

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{10} \\ x \equiv 5 \pmod{7} \end{cases}$$

b) si determini la soluzione di valore assoluto minimo.

2. sia $A = Z_5 + Z_3 = \{(a,b) \mid a \in Z_5,\ b \in Z_3\}$. Si dimostri che A è gruppo rispetto all'operazione di somma così definita:

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d).$$

a) Si determini l'ordine di A e si dica se A è ciclico e, in caso affermativo, si indichi un generatore.
b) Sia $H = \{(a,0) \mid a \in Z_5\}$. Si provi che H è un sottogruppo di A e si determinino i laterali (sinistri) distinti di H in A.

3. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali. Siano:

$$W = \{A \in V \mid detA = 0\}, \quad U = \{B \in V,\ B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in R\}$$

a) Si dica se W e U sono sottospazi vettoriali di V.
b) In caso affermativo, se ne determini la dimensione e se ne indichi una base.

4. Data la matrice:

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) si dica se è diagonalizzabile.
b) Si determini una base per l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = 4$.

ESAME SCRITTO DI MATEMATICA DISCRETA - 7 GIUGNO 1999

1) Stabilire per quali valori del parametro reale h è lineare l'applicazione $f : R^3 \longrightarrow R^3$ definita da:

$$f_h \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + hb \\ (1-h)a^2 + c \\ (1-h^2) + b \end{pmatrix}$$

e nel caso in cui sia lineare stabilire la dimensione e una base per lo spazio immagine nonchè per il nucleo.

2)Si determinino i valori del parametro reale k per i quali è diagonalizzabile la matrice

$$A = \begin{pmatrix} k-1 & 5 & k \\ 0 & 2-k & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e in questi casi si determini una matrice diagonale simile ad A.

3) Per ogni $h \in R, h \neq 0$ si consideri l'applicazione

$$f_h : R \longrightarrow R$$

definita ponendo $f_h(x) = hx$.
Si mostri che l'insieme delle applicazioni f_h al variare di h è un gruppo G rispetto al prodotto di applicazioni e che l'insieme

$$H = \{f_1, f_{-1}\}$$

è un sottogruppo di G.

4) Dati i polinomi $a(x), b(x) \in Z_p[x]$ (p primo)

$$a(x) = x^3 + x^2 + x - 12$$

$$b(x) = x^2 + 2x + 8$$

si determinino i valori di p (primo) per cui risulta $MCD(a(x), b(x)) = k \neq 0$, $k \in Z_p$.

ESERCIZI

Lista A

Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

1. La congruenza $21x \equiv 15 \pmod{35}$ ammette soluzioni intere.
2. La classe $[18]_{42}$ è invertibile in $\mathbb{Z}_{42}$.
3. $MCD(15,40) = MCD(40,15+40n)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.
4. $[6]_{27}$ è un generatore del gruppo ciclico $\mathbb{Z}_{27}$ (rispetto a +).
5. $[7]_{27}$ è un generatore del gruppo ciclico $\mathbb{Z}_{27}$ (rispetto a +).
6. Sia $Ax = b$ un sistema di 3 equazioni in 5 incognite; il sistema ha sempre infinite soluzioni dipendenti da due parametri.
7. Sia $Ax = b$ un sistema di 2 equazioni in 5 incognite; non è possibile che il sistema abbia una sola soluzione.
8. Il polinomio $x^3 + 1$ è irriducibile in $\mathbb{Z}_3[x]$.
9. Se le matrici A e B sono invertibili, allora anche A+B è invertibile.
10. Se le matrici A e B sono invertibili, allora anche AB è invertibile.
11. Siano n,a,b numeri interi; se $n|ab$, allora o $n|a$ oppure $n|b$.
12. Una matrice A è diagonalizzabile se e solo se $\det A \neq 0$.
13. Le classi [33], [-16], [-85], [567], [96] costituiscono un sistema completo di rappresentanti di $\mathbb{Z}_5$.
14. La congruenza $6x \equiv 2 \pmod{40}$ ammette una e una sola soluzione intera x tale che $0 \leq x < 40$.
15. Se x è un divisore dello zero in un anello A, allora x non è invertibile in A.
16. Il polinomio p(x) è invertibile in F[x] se e solo se $\deg p(x) = 0$.
17. Nello spazio vettoriale E dei polinomi di grado minore o uguale a 3, il sottoinsieme $V = \{p(x) \in E: p(1) = 1\}$ è un sottospazio vettoriale.
18. Nello spazio vettoriale E dei polinomi di grado minore o uguale a 3, il sottoinsieme $V = \{p(x) \in E: p(-2) = 0\}$ è un

sottospazio vettoriale.

19 In $\mathbb{R}^4$ sia V il sottospazio generato dai vettori $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; il vettore $u = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartiene a V.

20 In $\mathbb{R}^4$ sia V il sottospazio generato dai vettori $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; il vettore $u = \begin{pmatrix} 22 \\ -7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ appartiene a V.

21 Siano u, v, w tre vettori in uno spazio vettoriale E; se u,v,w sono linearmente indipendenti, allora anche u e w sono linearmente indipendenti.

22 Siano u, v, w tre vettori in uno spazio vettoriale E; se u,v,w sono linearmente dipendenti, allora anche u e w sono linearmente dipendenti.

23 Nello spazio vettoriale E dei polinomi di grado minore o uguale a 2, i tre polinomi $p(x) = x^2 + x + 1$, $q(x) = x - 1$, $r(x) = 2x + 1$ costituiscono una base.

24 Nello spazio vettoriale $(\mathbb{Z}_3)^3$ ogni sottospazio di dimensione due ha esattamente 9 elementi.

25 Se V e W sono sottospazi vettoriali di dimensione 3 in $\mathbb{R}^5$, allora $V \cap W$ ha dimensione almeno uguale a 1.

26 Sia E lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali. L'applicazione $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(A) = \mathrm{tr}A$ è una applicazione lineare.

27 Sia E lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali. L'applicazione $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(A) = \det A$ è una applicazione lineare.

28 Sia V uno spazio vettoriale e $f: V \longrightarrow V$ una applicazione lineare; se i vettori u, v, w sono linearmente dipendenti in V, allora anche i vettori f(u), f(v), f(w) lo sono.

29 Sia V uno spazio vettoriale e $f: V \longrightarrow V$ una applicazione

lineare; se i vettori **u**, **v**, **w** sono linearmente indipendenti in V, allora anche i vettori f(**u**), f(**v**), f(**w**) lo sono.

30 Se 3 è un autovalore per la matrice A e 2 è un autovalore per la matrice B, allora 5 è un autovalore della matrice A+B.

Lista B

1 Dimostrare (per induzione) che $1^3 + 2^3 + .. + n^3 = (n(n+1)/2)^2$.

2 Dimostrare che $4^n \equiv 1 \pmod 3$, $\forall n \geq 0$.

3 Trovare tutte le soluzioni intere di $5x + 7y = 3$.

4 Dire per quali interi a l'equazione $ax + 6y = 3$ ha soluzioni intere.

5 Trovare a) tutte le soluzioni intere b) la minima soluzione non negativa della congruenza $12x \equiv -3 \pmod 7$.

6 Determinare tutte le soluzioni intere della congruenza $10^x \equiv 23 \pmod 7$.

7 Dire se $\mathbb{Z}_{11}^*$ è un gruppo ciclico, e, in caso affermativo, trovarne tutti i possibili generatori.

8 Trovare un MCD dei due polinomi $p(x) = x^2 + 1$ e $q(x) = x^6 + 1$ a) in $\mathbb{R}[x]$; b) in $\mathbb{Z}_2[x]$.

9 Fattorizzare il polinomio $p(x) = x^4 - 5$ a) in $\mathbb{R}[x]$; b) in $\mathbb{Z}_7[x]$.

10 Nel gruppo moltiplicativo $\mathbb{Z}_{13}^*$ determinare gli ordini di tutti gli elementi.

11 Nel gruppo additivo $\mathbb{Z}_{13}$ determinare gli ordini di tutti gli elementi.

12 Trovare tutte le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x - y + z - w = 1 \\ 3x + 2y + z = 2 \\ 4x + 3y + 2z - w = 0 \end{cases}$$ a) in $\mathbb{R}$ b) in $\mathbb{Z}_2$ c) in $\mathbb{Z}_3$.

13 Discutere, al variare dei parametri α e β in $\mathbb{R}$, le soluzioni in $\mathbb{R}$ del sistema $$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ \alpha x + y + z = \alpha+1 \\ x + \alpha y - \alpha z = \beta \end{cases}$$

14 Trovare una matrice invertibile P e una matrice diagonale D

tale che $P^{-1}AP = D$, dove A sia la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

15 Discutere, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, se la matrice A è diagonalizzabile, dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & \alpha & 5 \end{pmatrix}$.

16 Sia $F = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ il campo dei numeri della forma $a + b\sqrt{2}$, con a e b in $\mathbb{Q}$; determinare l'inverso di $-2 + 3\sqrt{2}$ in F.

17 Nel gruppo S_9 delle permutazioni su 9 elementi:

a) fattorizzare la permutazione
$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 7 & 6 & 4 & 1 & 9 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$;

b) determinare l'ordine di ρ (cioè il più piccolo intero positivo k tale che $\rho^k = id$).

18 Nel gruppo moltiplicativo $\mathbb{Z}_{11}^*$, quante e quali sono le classi laterali rispetto al sottogruppo generato dall'elemento

(a) $[2]_{11}$ (b) $[3]_{11}$ (c) $[10]_{11}$?

19 Determinare tutte le soluzioni intere del sistema di congruenze $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 7 \\ x \equiv 3 \pmod 5 \\ x \equiv 0 \pmod 3 \end{cases}$.

20 Determinare un MCD $d(x)$ tra i due polinomi $p(x) = x^{11} - 1$ e $q(x) = x^9 - 1$ in $\mathbb{R}[x]$; determinare inoltre due polinomi $a(x)$ e $b(x)$ tali che $d(x) = a(x)p(x) + b(x)q(x)$.

21 Trovare le soluzioni $p(x) \in \mathbb{Z}_2[x]$ della congruenza $(x^3 + x + 1)p(x) \equiv 1 \pmod{x^4 + x + 1}$.

22 Determinare la dimensione e una base dei sottospazi $V \cap W$ e $V + W$, dove V è il sottospazio di $\mathbb{R}^5$ generato dai vettori e_1 ed e_3 (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 sia la base canonica di $\mathbb{R}^5$) e W è il sottospazio definito da

$$W = \left\{(x,y,z,t,u) \in \mathbb{R}^5 : x-z+t = 0 \ \text{ e } \ x+y-z+u = 0\right\}.$$

23 Nello spazio vettoriale E dei polinomi di grado minore o uguale a 2, determinare le coordinate di $f(x) = x^2$ rispetto alla base costituita dai tre polinomi $p(x) = x^2 + x + 1$, $q(x) = x - 1$, $r(x) = 2x + 1$.

24 Nello spazio vettoriale E dei polinomi di grado minore o

uguale a 2, determinare il polinomio $f(x)$ che ha coordinate $(5,-7,3)$ rispetto alla base costituita dai tre polinomi $p(x) = x^2+ x + 1$, $q(x) = x - 1$, $r(x) = 2x + 1$.

25 Discutere, al variare del parametro reale α, il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & \alpha & -\alpha \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

26 Dire per quali valori dei parametri reali α, β esiste una applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ -2 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

27 Sia E lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2, e sia $T\colon E \longrightarrow E$ l'applicazione lineare definita da $T(ax^2+bx+c) = (b-a)x^2 + (a+b+c)x + a$.

Determinare la matrice associata all'applicazione lineare T rispetto alla base costituita dai tre polinomi $p(x) = x^2+ x + 1$, $q(x) = x - 1$, $r(x) = 2x + 1$ (in partenza e in arrivo).

28 Determinare nucleo e immagine della applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

29 Sia E l'insieme delle matrici 3×3 della forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a coefficienti in $\mathbb{Z}_7$. Dire se E costituisce un gruppo ciclico rispetto all'usuale prodotto fra matrici.

30 Determinare una applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che il nucleo di f sia $\ker f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x+y-z = 0\right\}$, l'immagine di f sia $\operatorname{Im} f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-z = 0 = x+y\right\}$ e 3 sia un autovalore per f.

31 Sia $\mathbb{Z}_p[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_p$ (con p primo); si consideri il polinomio $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$

$f(x) = x^6+ x^5+ 3x^3+ 3x^2+ 2x + 2$.

a) si determinino i valori di p per cui $f(x)$ ammette come radice 1;

b) si determinino i valori di p per cui $f(x)$ ammette come radice -1;

c) si determinino gli eventuali valori di p per cui $f(x)$ è irriducibile in $\mathbb{Z}_p[x]$.

N.B. Scriviamo a per $[a]_p$.

32 Sia $A = \mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_3$ l'insieme di tutte le coppie (a,b) con $a \in \mathbb{Z}_7$ e $b \in \mathbb{Z}_3$, con le operazioni di somma e prodotto definite da: $(a,b) + (c,d) = (a+c,b+d)$ $(a,b)\cdot(c,d) = (a\cdot c,b\cdot d)$.

a) Verificare che A con le operazioni + e $\cdot$ è un anello;

b) trovare gli elementi invertibili di A;

c) trovare gli (eventuali) divisori dello zero in A.

33 Dimostrare che se p è un numero primo non congruo a 1 modulo 4, allora $[-1]$ non è un quadrato in $\mathbb{Z}_p$ (cioè non esiste a tale che $[a]_p^2 = [-1]_p$.

34 Sia A una matrice quadrata, tale che $A^2 = A$; a) dimostrare che gli unici possibili autovalori di A sono i numeri 0 e 1; b) dimostrare che A è diagonalizzabile.

35 Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 5, u e v due assegnati vettori di V, e $f: V \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una applicazione lineare tale che $f(u) = (1,1)$ e $f(v) = (0,1)$. Dimostrare che $V = W \oplus \ker f$, dove W sia il sottospazio generato da u e da v.

N.B In tutti gli esercizi (a meno che non venga esplicitamente richiesto il contrario) si richiede di MOTIVARE le risposte: non verrà ritenuto sufficiente lo svolgimento di un esercizio di cui venga data una soluzione corretta, ma in cui la soluzione non sia adeguatamente giustificata.

NUMERI INTERI e CONGRUENZE

Esercizio

a) Dimostrare che M.C.D. (a, b) = M.C.D. (a, b-a), per ogni a, b $\in$ Z.
b) Determinare il M.C.D. dei due numeri 333.333.333.333 e 333.333.333.339.

Test (corretta C)
Si consideri la congruenza $20x \equiv 14 \pmod{55}$.
A) La congruenza data ha una sola soluzione intera.
B) La congruenza data ha infinite soluzioni intere.
C) La congruenza data non ha soluzioni intere.

Test (corretta D)
Quante sono le soluzioni intere della congruenza $15x \equiv 10 \pmod{35}$ nell'intervallo $0 \le x < 35$?
A) 1.
B) Nessuna.
C) 7.
D) 5.

Esercizio

a) Dimostrare che se 5 non divide n (n $\in$ N), allora 5 divide n^8-1.
b) Risolvere la congruenza: $2^9 x \equiv 3^8 \pmod{5}$.

Esercizio
Determinare tutte le soluzioni intere del sistema di congruenze:

$$\begin{cases} 23x \equiv 27 \pmod{5} \\ 18x \equiv 40 \pmod{7} \end{cases}$$

Test (corretta C)

Si consideri la congruenza $8x \equiv 77 \pmod{20}$.
A) La congruenza data ha una sola soluzione intera.
B) La congruenza data ha infinite soluzioni intere.
C) La congruenza data non ha soluzioni intere.

Esercizio 1

Determinare tutte le soluzioni intere della congruenza:
$94^x \equiv 187 \pmod{9}$.

Test 3
Si consideri la congruenza

$$ax \equiv n \pmod{b}$$

A) Se M.C.D.(a,b) $\neq$ 1 allora la congruenza data ha soluzione.
B) Se M.C.D.(a,b) = 1 allora la congruenza data ha soluzione.
C) Se la congruenza data ha soluzione allora M.C.D.(a,b) $\neq$ 1.
D) Se la congruenza data ha soluzione allora M.C.D.(a,b) = 1.

Esercizio
Risolvere la congruenza $2^8 x \equiv 5^{13} \pmod{7}$.

$\mathbf{Z}_n$

Esercizio

Si consideri il sistema lineare nelle incognite x, y a coefficienti nel campo Z_p (p primo):

$$\begin{cases} 3x + y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

Discutere a variare del campo Z_p le soluzioni del sistema.

Test (corretta B)

A) $Z_3 = \{ [-149]_3, [61]_3, [666]_3 \}$.
B) $Z_3 = \{ [-149]_3, [62]_3, [666]_3 \}$.
C) $Z_3 = \{ [-149]_3, [63]_3, [666]_3 \}$.

Test (corretta C)
Quanti sono gli elementi di Z_{12} che sono dei generatori per il gruppo $(Z_{12},+)$?
A) Nessuno: $(Z_{12},+)$ non è un gruppo ciclico.
B) 12.
C) 4.
D) 8.

Test 1
L'inverso rispetto al prodotto di $[4]_{17}$ in Z_{17} è
A) $[4]_{17}$
B) $[13]_{17}$
C) $[0]_{17}$

Test 1
In Z_7 quali delle seguenti affermazioni è vera

A) $[45]_7 = [-24]_7$.
B) $[45]_7 = [-39]_7$.
C) $[45]_7 = [-29]_7$.

Test (corretta B)
A) $Z_3 = \{ [-173]_3, [31]_3, [996]_3 \}$.
B) $Z_3 = \{ [-173]_3, [32]_3, [996]_3 \}$.
C) $Z_3 = \{ [-173]_3, [33]_3, [996]_3 \}$.

PERMUTAZIONI

Test
Nel gruppo delle permutazioni su 5 elementi si consideri

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

L'ordine di ρ è
A) 2.
B) 3.
C) 5.
D) 6.

Esercizio
Nel gruppo S_4 delle permutazioni su 4 elementi si consideri la permutazione

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Determinare l'ordine di τ.

b) Determinare τ^{-1}

c) Determinare, se esiste, un elemento di S_4 il cui ordine sia, rispettivamente,3, 4, 5, 6.

Esercizio

Sia $G = S_5$ il gruppo delle permutazioni su 5 elementi, e sia

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in G$$

a) Determinare l'ordine di g in G. b) Determinare l'inverso di g.

c) Dare un esempio di un elemento $g' \in G$ tale che $g \cdot g' = g' \cdot g$ e di un elemento $g'' \in G$ tale che $g \cdot g'' \neq g'' \cdot g$.

Test 3

Sia $(G, \cdot)$ un gruppo moltiplicativo finito di ordine 45.

A) $g^{15} = 1$, per ogni $g \in G$.

B) G può contenere un sottogruppo di ordine 15.

C) G può contenere un sottogruppo di ordine 40.

Esercizio

Sia A il sottoinsieme dei numeri reali della forma

$$a + b\sqrt{2} \qquad \text{con} \quad a, b \in Z$$

a) Si chiede se A è un gruppo rispetto alla somma.

b) Si chiede se A è un gruppo rispetto al prodotto.

c) Determinare l'inverso rispetto al prodotto dell'elemento $1 + \sqrt{2}$.

Esercizio

Sia $Z_5[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti in Z_5. Per ogni f(x) in $Z_5[x]$ indichiamo con I_f l'insieme

$$I_f = \{p(x) \in Z_5[x] \; : \; f(x) \mid p(x)\}.$$

a) Dimostrare che I_f è un gruppo rispetto la somma.

b) Sia $f(x) = x^6 - 1$ e $g(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 2$. Determinare $I_f \cap I_g$.

Esercizio

Sia $A = Z_4 \oplus Z_{18}$ l'anello di tutte le coppie (a,b) con $a \in A$ e $b \in B$, con le operazioni + e $\cdot$ definite da:

$$(a,b) + (a',b') = (a+a',b+b')$$
$$(a,b) \cdot (a',b') = (aa',bb')$$

a) Determinare in A un esempio (se esiste) di un elemento invertibile $(\neq(1,1))$ e di un elemento $(\neq(0,0))$ non invertibile.

b) Caratterizzare tutti gli elementi invertibili in A.

c) Determinare (se esiste) un esempio di un divisore dello zero in A.

d) Dire se (A,+) è un gruppo ciclico.

POLINOMI

Test 2

In $Z_p[x]$, anello dei polinomi a coefficienti nel campo Z_p (p primo), si considerino i polinomi $f = x(x^2 - 1)$ e $g = (x+1)^2$.

A) per ogni p, M.C.D.(f, g) = x+1.

B) per ogni p, M.C.D.(f, g) = 1.

C) M.C.D.(f, g) = g se e solo se p = 2.

Esercizio
Sono dati i polinomi di $Z_p[x]$, con p primo:

$$f(x)= 2x^3 + 3x^2 + 2x + 3$$
$$g(x)= x^2 - x .$$

Determinare i valori di p tali che f(x) e g(x) siano primi fra loro.

Test (corretta C)
Sia $Z_5[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti in Z_5.
A) $x^2 - 3$ è riducibile.
B) $x^2 + 3$ è riducibile.
C) $x^2 + 1$ è riducibile.

Test (corretta D)
Qual è il M.C.D. dei polinomi $f(x) = x^3 + 1$ e $g(x) = x^2 - x - 2$ in $Z_3[x]$?
A) 1.
B) 0.
C) $x + 1$.
D) $(x + 1)^2$.

Esercizio 3
In $Z_p[x]$, p primo, si consideri il polinomio $f(x) = x^4 - 1$.
a) Si determinino i primi p per i quali f(x) è riducibile.
b) Si determinino i primi p per i quali f(x) è divisibile per $x^2 - 4$.
c) Si determinino i primi p per i quali f(x) è divisibile per $x - 3$.

Test (corretta C)

Sia $Z_5[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti in Z_5.
A) $x^2 + 2$ è riducibile in $Z_5[x]$.
B) $x^2 + 3$ è riducibile in $Z_5[x]$.
C) $x^2 + 1$ è riducibile in $Z_5[x]$.

Esercizio
Determinare la scomposizione in fattori irriducibili del polinomio

$$p(x) = x^4 + 3x^2 + 2$$

a) in C[x] b) in R[x] c) in $Z_3[x]$ d) in $Z_5[x]$.

Esercizio

Sia V= $Z_3[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti in Z_3. Sia S il sottoinsieme costituito dai polinomi f(x) di V di grado ≤ 2 tali che $f(1)=f(-1)$.
a) Determinare tutti i polinomi di S.
b) Determinare i polinomi irriducibili di S.

Algebra lineare

Test (corretta A)
Una matrice quadrata M di ordine 3 a elementi reali ha il seguente polinomio caratteristico: $t(7- t)(1- t)$.

A) Tutte le matrici M con questo polinomio caratteristico sono diagonalizzabili.
B) Tutte le matrici M con questo polinomio caratteristico sono non diagonalizzabili.
C) Esistono sia matrici M con questo polinomio caratteristico diagonalizzabili e sia matrici M con questo polinomio caratteristico non diagonalizzabili.

Test (corretta B)
Sia Ax=b un sistema lineare di 4 equazioni in 3 incognite e sia A'= (A|b) la matrice completa del sistema.
(notazione: rk A = rango di A)

A) Se rk A = rk A' = 3, il sistema ha infinite soluzioni.
B) Se rk A = rk A' = 3, il sistema ha una sola soluzione.
C) Se rk A' = 4, il sistema ha soluzione.

Test (corretta B)
Sia V uno spazio vettoriale e S= {$\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$} una base di V.
A) {$\underline{u}$ + $\underline{v}$, $\underline{w}$, $\underline{u}$ + $\underline{v}$ + $\underline{w}$} è una base di V.
B) {$\underline{u}$ + $\underline{v}$, $\underline{u}$+ $\underline{v}$ + $\underline{w}$, $\underline{v}$} è una base di V.
C) {$\underline{u}$ + $\underline{v}$, $\underline{u}$, $\underline{v}$ } è una base di V.

Test (corretta C)
Sia Ax=b un sistema lineare di 5 equazioni in 4 incognite e sia A'= (A|b) la matrice completa del sistema. (notazione: rk A = rango di A).
A) Se rkA=4, il sistema ha una sola soluzione.
B) Se rkA=4, il sistema ha infinite soluzioni.
C) Se rkA'=5, il sistema non ha soluzioni.

Test (corretta B)
Sia V il sottospazio di R^3 generato dai vettori $\underline{u}$=(1,0,1) , $\underline{v}$=(2,1,2).
A) (4, 4, 2) ∈V.
B) (-3, 5,-3) ∈V.
C) (5, -5, 2) ∈V.
D) (2,7,-2) ∈V.

Test (corretta B)
Sia A una matrice nxn e sia A^T la trasposta di A. Quale delle seguenti affermazioni è FALSA?
A) A e A^T hanno gli stessi autovalori.
B) A e A^T hanno gli stessi autovettori.
C) det A = det A^T.

Test
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 5 e siano U e W due suoi sottospazi di dimensione 2 e 3, rispettivamente.
A) V = U ⊕ W , comunque si scelgano U e W.
B) V ≠ U ⊕ W , comunque si scelgano U e W.
C) Esiste una coppia di sottospazi U e W tali che V = U+W , ma questa somma non è diretta.
D) Esiste una coppia di sottospazi U e W tali che V = U ⊕ W.

Test
Sono date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

A) rk (AB)= 2, per ogni k ∈ R.
B) rk (AB)= 2 se e solo se k = 0.
C) rk (AB)= 2 se e solo se k ≠ 0.

Test
Siano $\underline{v}$ e $\underline{w}$ autovettori di un'applicazione lineare f: $R^2 \rightarrow R^2$ relativi all'autovalore 2 e tali che 2$\underline{v}$ + 3$\underline{w}$ ≠ $\underline{0}$.
A) 2$\underline{v}$ + 3$\underline{w}$ è un autovettore di f relativo all'autovalore 2, comunque si scelgano $\underline{v}$ e $\underline{w}$.
B) 2$\underline{v}$ + 3$\underline{w}$ è un autovettore di f relativo all'autovalore 2 se e solo se $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono linearmente indipendenti.
C) 2$\underline{v}$ + 3$\underline{w}$ è un autovettore di f relativo all'autovalore 2 se e solo se $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono linearmente dipendenti.

Test
Sia Ax=b un sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite tale che il rango di A sia 2.
Quale delle seguenti eventualità è <u>impossibile</u>
A) il sistema non ha soluzione.

B) il sistema ha una sola soluzione.
C) il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da 1 parametro.

Test
Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

A) A è diagonalizzabile per ogni $a \in R$.
B) A non è diagonalizzabile per nessun valore di a.
C) A è diagonalizzabile se e solo se $a \neq 0$.
D) A è diagonalizzabile se e solo se $a \neq 1$.

Test
Sia E lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 2. Dire quale fra le seguenti terne rappresenta una base di E.
A) $\{x + 1, x^2 + 1, x^2 - x\}$.
B) $\{x^2 + x, x^2 - x, 3x^2 + 5x\}$.
C) $\{x^2 - 2x + 1, 3x^2, x^2 + 1\}$.

Test
Siano $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ vettori linearmente indipendenti di R^3.
A) $\dim \langle \underline{u}, \underline{u} + \underline{v}, \underline{u} + \underline{v} + \underline{w} \rangle = 3$.
B) $\dim \langle \underline{u}, \underline{u} + \underline{v} + \underline{w}, 2\underline{u} + \underline{v} + \underline{w} \rangle = 1$.
C) $\dim \langle \underline{u}, \underline{u} + \underline{v}, \underline{u} + \underline{v} + \underline{w} \rangle = 2$.
D) $\dim \langle \underline{u}, \underline{u} + \underline{v} + \underline{w}, 2\underline{u} + \underline{v} + \underline{w} \rangle = 3$.

Test
Sia M lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 ad elementi reali . Sia S il sottospazio di M costituito dalle matrici X tali che AX=O essendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \in S$

B) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in S$

C) $S = M$.

Test 3
Sia $f_k\colon R^3 \to R^3$ l'applicazione così definita $f_k((x,y,z)) = (x+y, z+k^2, 1)$, essendo k un parametro reale.
A) Per $k = 0$ l'applicazione è lineare.
B) Per $k = 1$ e $k = -1$ l'applicazione è lineare.
C) L'applicazione non è mai lineare.

Esercizio
Sia $f\colon R^3 \to R^4$ l'applicazione lineare così definita $f(X)= AX$, essendo A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & k \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}$$

e $X = (x_1, x_2, x_3)^T$.
a) Determinare gli eventuali valori del parametro reale k per i quali $\underline{v} = (0,0,1,k) \in \mathrm{Im}\, f$.
b) Si ponga k=1: determinare una base e la dimensione di kerf e imf.

Esercizio
Sia $V = R_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali.di grado ≤ 3. Sia S il sottospazio di V costituito dai polinomi della forma

$$a+b+d+(2b-c)x+(2a+c+2d)x^3.$$

Determinare la dimensione e una base di S.

Esercizio
Nello spazio vettoriale E delle matrici 2x2 a coefficienti reali si considerino i sottoinsiemi

$$V=\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : b^2=c^2 \right\} \quad e \quad W=\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : c=b+d \right\}$$

Dire se sono sottospazi di E e in caso affermativo determinarne la dimensione e una base.

Esercizio
Discutere al variare del parametro reale k l'insieme delle soluzioni del sistema lineare nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} x+ky+z=1 \\ kx+y+z=k \\ 2x+(k+1)y+(k+1)z=k^2+1 \end{cases}$$

Esercizio
Nello spazio vettoriale V delle matrici 2x2 a coefficienti reali si considerino i sottoinsiemi

$$S=\{A\in V : \det A=0\} \quad e \quad T=\{A\in V : \operatorname{tr} A=0\}$$

(tr A è la somma degli elementi della diagonale principale della matrice A).
Dire se S e T sono sottospazi vettoriali di V e in caso affermativo determinarne la dimensione e una base.

Esercizio
Discutere al variare dei parametri reali a e b le soluzioni del sistema lineare nelle incognite x,y, z:

$$\begin{cases} x-y+az=b \\ 2x+(1-a)y=2b \\ -y+az=1 \end{cases}$$

Esercizio
In R^4 sia V il sottospazio generato da $\{(2,1,1,-2), (0,1,1,-2)\}$ e sia W il sottospazio così definito:
$W=\{(x,y,z,t)\in R^4 : x-y=y+z+t=0\}$.
Determinare la dimensione ed una base dei sottospazi $V\cap W$ e $V+W$.

Esercizio
Sia V il sottospazio di R^4 generato dai vettori $\{\underline{u}=(1,1,1,1), \underline{v}=(0,1,0,1), \underline{w}=(2,1,0,0)\}$
a) Determinare l'equazione (o le equazioni) che devono verificare le coordinate x, y, z, t di un vettore $\underline{a}$ di R^4 affinchè sia $\underline{a}\in V$.
b) Dare un esempio, se esiste, di un vettore $\underline{b}$ di R^4 tale che $\langle\underline{b}\rangle \oplus V=R^4$.
c) Dare un esempio , se esiste, di un sottospazio vettoriale S di R^4 di dimensione 2 tale che $S \oplus V = R^4$.

Esercizio
Dire per quali valori del parametro reale t la matrice

$$A=\begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile (su R).