Capitolo 1

L'insieme dei numeri complessi

1.1. Introduzione ai numeri complessi

Definizione 1.1.1 *Sia assegnata una coppia ordinata* (a, b) *di numeri reali. Si definisce* numero complesso *l'espressione*

$$z = a + \imath b.$$

I numeri a e b sono detti rispettivamente *parte reale* e *parte immaginaria* di z e sono indicati con i simboli

$$a = \Re e\ z \qquad\qquad b = \Im m\ z.$$

I numeri con parte immaginaria nulla possono essere identificati con i numeri reali e perciò si scrive semplicemente a e non $a+\imath 0$. I numeri con parte reale nulla sono detti *immaginari puri* e si scrivono semplicemente $\imath b$ invece che $0+\imath b$; in particolare il numero $0+\imath 1$ si indica semplicemente con $\imath$ ed è detto *unità immaginaria*.
Due numeri complessi $a + \imath b$ e $c + \imath d$ sono uguali se e solo se $a = c$ e $b = d$. Nell'insieme dei numeri complessi si possono introdurre le operazioni di somma e di prodotto tramite la seguente definizione.

Definizione 1.1.2 *Dati due numeri complessi* $a + \imath b$ *e* $c + \imath d$*, la loro somma è il numero complesso*

$$(a + c) + \imath(b + d),$$

mentre il loro prodotto è il numero complesso

$$(ac - bd) + \iota(ad + bc).$$

La somma e il prodotto così definiti godono delle proprietà associativa e commutativa.
Osserviamo che, posto $z = a + \iota b$ e $0 = 0 + \iota 0$, risulta

$$z + 0 = (a + \iota b) + (0 + \iota 0) = a + \iota b = z$$

per cui 0 ha le stesse proprietà formali dell'insieme dei reali, ovvero di essere *elemento neutro* per la somma. Per ogni numero complesso $z = a + \iota b$ è possibile definire l'*opposto* come

$$-z = -a - \iota b$$

tale che $z+(-z) = 0$. La *differenza* tra due numeri complessi si definisce come la somma dell'opposto, infatti

$$(a + \iota b) - (c + \iota d) = (a + \iota b) + (-c - \iota d) = a - c + \iota(b - d).$$

È facile vedere dalla definizione di prodotto che il numero complesso $1 + \iota 0$ è *elemento neutro* per il prodotto.
Assegnato $z = a + \iota b$ si definisce *coniugato* di z il numero $\overline{z} = a - \iota b$.
Inoltre se $z \neq 0$ si può definire il *reciproco* $1/z$ come il numero $x + \iota y$ tale che

$$z \cdot \frac{1}{z} = 1.$$

Deve essere

$$(a + \iota b)(x + \iota y) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} ax - by & = 1 \\ bx + ay & = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a}{a^2 + b^2}; \qquad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

Dunque

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \iota \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

In pratica $1/z$ può essere ottenuto così

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + \iota b} = \frac{a - \iota b}{(a + \iota b)(a - \iota b)} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \iota \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

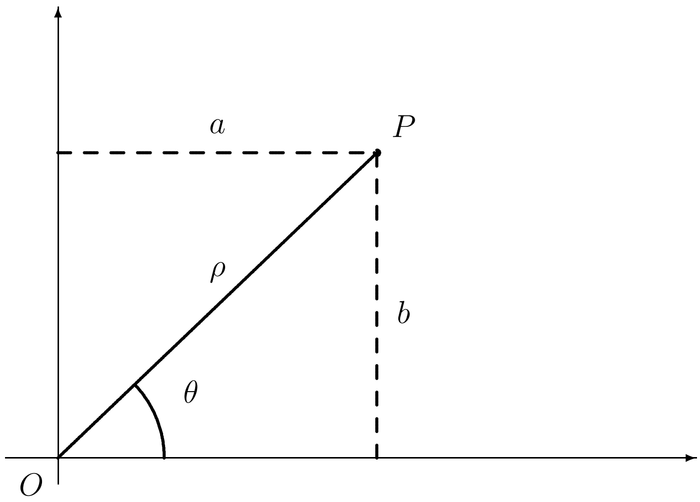

Figura 1.1:

L'insieme dei numeri complessi dotato delle operazioni di somma e prodotto ora definita è indicato con $\mathbb{C}$.
Osservazione. Dalla definizione di prodotto risulta

$$\iota^2 = \iota\ \iota = (0 + \iota 1)(0 + \iota 1) = -1.$$

Forma trigonometrica di un numero complesso

Un numero complesso $z = a + \iota b$ può essere rappresentato geometricamente nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ con il vettore di componenti (a, b), ciò permette un secondo modo di rappresentare un numero complesso, la *forma trigonometrica* (vedere figura 1.1).

Consideriamo il numero complesso $z = a + \iota b$ e il vettore $\overrightarrow{OP}$ che lo rappresenta. Il vettore $\overrightarrow{OP}$ può essere rappresentato o attraverso le componenti a, b oppure assegnando la lunghezza ρ e l'angolo θ formato con l'asse reale positivo intendendo come positivi tutti gli angoli ottenuti mediante rotazione in senso antiorario dal semiasse positivo alla semiretta che contiene $\overrightarrow{OP}$. Il numero reale non negativo ρ viene indicato con $|z|$ ed è detto *modulo di z* mentre l'angolo θ si chiama *argomento* e si indica con $\arg(z)$. Valgono le seguenti relazioni:

1. $a = \Re e z = |z| \cos(arg(z))$;
2. $b = \Im m z = |z| \sin(arg(z))$;
3. $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$;
4. $\sin\theta = b/\rho$;
5. $\cos\theta = a/\rho$;
6. $\tan\theta = b/a$.

In definitiva z può essere scritto in questo modo

$$z = |z| \left(\cos(arg(z)) + \imath \sin(arg(z))\right).$$

Osservazione. La rappresentazione in forma trigonometrica di un numero complesso non fornisce una corrispondenza biunivoca tra la coppia $(|z|, arg(z))$ e i punti del piano complesso. L'origine del piano complesso corrisponde infatti alle (infinite) coppie della forma $(0, \theta)$ indipendentemente dal valore di θ. Se assumiamo $|z| \neq 0$ notiamo che un punto del piano complesso individua sia la coppia $(|z|, \theta)$ che la coppia del tipo $(|z|, \theta + 2k\pi)$.

Modulo, argomento e complesso coniugato

Il modulo di un numero complesso soddisfa le seguenti proprietà:

1. $|z| \geq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ e $|z| = 0$ se e solo se $z = 0$;
2. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

L'argomento di un numero complesso soddisfa le seguenti proprietà:

1. $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
2. $\arg(z_1/z_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$ per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Il numero complesso $\overline{z} = z^*$, coniugato di $z = a + \imath b$, è legato alla parte reale, immaginaria e modulo di z dalle seguenti relazioni:

1. $\Re e z = (z + z^*)/2$;
2. $\Im m z = (z - z^*)/(2\iota)$;
3. $|z|^2 = zz^*$.

Inoltre

1. $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$;
2. $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$.

Formula di De Moivre

Posto $z = \rho(\cos\theta + \iota\sin\theta)$ dalla formula del prodotto è facile dedurre che, per $n = 1, 2, \ldots$:

$$z^n = \rho^n(\cos n\theta + \iota\sin n\theta).$$

Infatti per $n = 1$ la relazione è banalmente verificata. Assumendola vera per un certo n proviamola per $n + 1$.

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^n \cdot z = z^n\rho(\cos\theta + \iota\sin\theta) = \\ &= \rho^n(\cos n\theta + \iota\sin n\theta)\rho(\cos\theta + \iota\sin\theta) = \\ &= \rho^{n+1}(\cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta + \iota(\sin n\theta\cos\theta + \cos n\theta\sin\theta)) = \\ &= \rho^{n+1}(\cos(n+1)\theta + \iota\sin(n+1)\theta)). \end{aligned}$$

Radici n-esime di un numero complesso

Assegnato $w \in \mathbb{C}$ si vogliono determinare tutti i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$z^n = w.$$

Tali numeri sono detti *radici n-esime di w*. Proviamo che ogni numero complesso ammette esattamente n radici distinte e diamo una formula per calcolarle. Posto

$$w = r(\cos\phi + \iota\sin\phi)$$

e

$$z = \rho(\cos\theta + \iota \sin\theta)$$

l'equazione $z^n = w$ si scrive

$$\rho^n(\cos n\theta + \iota \sin n\theta) = r(\cos\phi + \iota \sin\phi).$$

Ricordando che due numeri complessi sono uguali se hanno lo stesso modulo e argomenti che differiscono per un multiplo di 2π abbiamo

$$\rho^n = r$$

e

$$n\theta = \phi + 2k\pi$$

ricavando allora

$$\rho = \sqrt[n]{r}$$

e

$$\theta = \frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}.$$

Quest'ultima relazione fornisce dei valori distinti di θ in corrispondenza di $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. La radice che si ottiene per $k = 0$ è detta *radice primitiva* o *fondamentale*. Per $k = n$ si trova

$$\theta = \frac{\phi}{n} + \frac{2n\pi}{n} = \frac{\phi}{n} + 2\pi$$

che coincide con la radice primitiva. Situazioni analoghe valgono per $k > n$ e $k < 0$. Le radici n-esime di un numero complesso sono dunque n e sono ottenute dalle relazioni:

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \qquad \theta = \frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

I punti $P_0, \ldots, P_{n-1}$ corrispondenti alle radici n-esime di w si trovano tutti sulla medesima circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt[n]{r}$ e sono i vertici di un poligono regolare a n lati.

Esempio 1.1.1 *Calcolare le radici quinte di 1.*
Applicando la formula si ha

$$\sqrt[5]{1} = \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) + \iota \sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right) \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Nella figura 1.2 sono visualizzate le 5 radici quinte dell'unità.

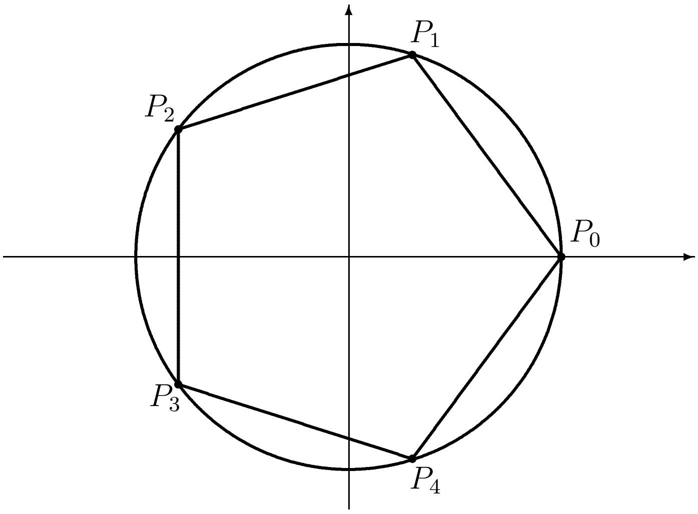

Figura 1.2:

Esponenziale complesso

Sia z un numero complesso non nullo scritto nella forma trigonometrica

$$z = |z|(\cos\theta + \iota\sin\theta).$$

Evidentemente il numero complesso $w = z/|z|$ ha modulo unitario. Dunque un qualunque numero complesso non nullo può essere espresso come prodotto di un numero reale positivo (il suo modulo) e un numero complesso di modulo 1,

$$z = |z|w, \qquad |w| = 1.$$

Siano ora z_1 e z_2 due numeri complessi di modulo 1:

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos\theta + \iota\sin\theta \qquad & |z_1| = 1 \\ z_2 &= \cos\phi + \iota\sin\phi \qquad & |z_2| = 1. \end{aligned}$$

Dalla definizione di prodotto si ha:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \cos(\theta + \phi) + \iota \sin(\theta + \phi) \\ |z_1 z_2| &= 1 \\ arg(z_1 z_2) &= arg(z_1) + arg(z_2). \end{aligned}$$

Notiamo che la moltiplicazione di z_1 e z_2 si traduce in una somma (quella degli argomenti) e in particolare per $\phi = -\theta$ si ha

$$z_1 z_2 = 1.$$

Questo comportamento è analogo a quello della funzione esponenziale reale. Infatti

$$e^a e^b = e^{a+b}, \qquad e^a e^{-a} = 1.$$

Questa analogia formale suggerisce di introdurre una rappresentazione del numero complesso di modulo 1 che faccia intervenire l'esponenziale del suo argomento. Ovviamente non si tratterà di esponenziali reali in quanto bisogna rappresentare numeri complessi. Queste considerazioni motivano, seppure in modo intuitivo, l'introduzione della *formula di Eulero*:

$$e^{\iota\theta} = \cos\theta + \iota \sin\theta$$

per la rappresentazione di numeri complessi di modulo 1. Sia ora z un generico numero complesso espresso nella forma $z = x + \iota y$. Considerando l'analogia formale con gli esponenziali reali imponiamo che l'esponenziale di una somma sia il prodotto degli esponenziali, cioè

$$e^z = e^{x+\iota y} = e^x e^{\iota y}.$$

Questa relazione, insieme alla formula di Eulero, pone la seguente definizione di *esponenziale di un numero complesso*:

$$e^z = e^{x+\iota y} = e^x(\cos y + \iota \sin y). \tag{1.1}$$

Da questa si deducono le seguenti proprietà:

1. $\Re e\, e^z = e^x \cos y$;

2. $\Im m e^z = e^x \sin y$;

3. $|e^z| = e^x$;

4. $arg(e^z) = y$.

Utilizzando la (1.1) è facile provare che per l'esponenziale complesso valgono le stesse regole dell'esponenziale reale:

1. $e^{z+w} = e^z e^w$, per ogni $z, w \in \mathbb{C}$;

2. $(e^z)^w = e^{zw}$.

Non è possibile estendere al campo complesso la proprietà di stretta positività di cui gode l'esponenziale reale, però è possibile provare che

$$e^z \neq 0 \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Infatti se esite un numero complesso $z_0 = x_0 + \iota y_0$ tale che $e^{z_0} = 0$ dovrebbe essere

$$\begin{cases} e^{x_0} \cos y_0 & = 0 \\ \\ e^{x_0} \sin y_0 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos y_0 & = 0 \\ \\ \sin y_0 & = 0 \end{cases}$$

e ciò è assurdo. La definizione di esponenziale complesso ha però una conseguenza imprevedibile se si considera l'analogia con la funzione esponenziale reale. Infatti per qualunque $k \in \mathcal{Z}$ si ha

$$\begin{aligned} e^{z+2k\pi\iota} &= e^{x+\iota y+2k\pi\iota} = e^{x+\iota(y+2k\pi)} = \\ &= e^x(\cos(y+2k\pi) + \iota \sin(y+2k\pi)) = \\ &= e^x(\cos y + \iota \sin y) = e^z \end{aligned}$$

cioè la funzione esponenziale complessa è periodica di periodo $2\pi\iota$.

Alcune proprietà dei moduli e dell'argomento

La forma esponenziale complessa permette un'agevole dimostrazione di alcune proprietà del modulo e dell'argomento di un numero complesso. Siano infatti

$$z_1 = \rho_1 e^{\iota\theta_1} \qquad \text{e} \qquad z_2 = \rho_2 e^{\iota\theta_2}$$

allora

$$z_1 z_2 = \rho_1 e^{\iota\theta_1} \rho_2 e^{\iota\theta_2} = \rho_1\rho_2 e^{\iota(\theta_1+\theta_2)}$$

e dunque

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \qquad \text{e} \qquad arg(z_1 z_2) = arg(z_1) + arg(z_2).$$

Analogamente

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{\iota\theta_1}}{\rho_2 e^{\iota\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{\iota(\theta_1-\theta_2)}$$

da cui

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \qquad \text{e} \qquad arg(z_1/z_2) = arg(z_1) - arg(z_2).$$

In particolare

$$|z_1 e^{\iota\alpha}| = |z_1|$$

e

$$arg(z_1 e^{\iota\alpha}) = arg(z_1) + \alpha \tag{1.2}$$

dunque la moltiplicazione di un numero complesso per l'esponenziale di un immaginario puro provoca una rotazione. Inoltre

$$|z_1\iota| = |z_1 e^{\iota\pi/2}| = |z_1|$$

e

$$arg(z_1\iota) = arg(z_1) + \frac{\pi}{2}$$

ovvero la moltiplicazione di un numero complesso per l'unità immaginaria provoca una rotazione di $\pi/2$.

Esempio 1.1.2 *Calcolare modulo e argomento del numero complesso*

$$z = \frac{1}{1+\iota\sqrt{3}}\ e^{\iota\pi/2}.$$

Sfruttando la proprietà (1.2) abbiamo

$$arg(z) = arg\left(\frac{1}{1+\iota\sqrt{3}}\right) + \frac{\pi}{2}$$

$$arg\left(\frac{1}{1+\iota\sqrt{3}}\right) = arg\left(\frac{1-\iota\sqrt{3}}{4}\right) =$$

$$= \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}\cdot 4}{4}\right) = -\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}.$$

Dunque

$$arg(z) = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Inoltre

$$|z| = \left|\frac{1}{1+\iota\sqrt{3}}\right| = \left|\frac{1}{4} - \frac{\iota\sqrt{3}}{4}\right| = \frac{1}{2}.$$

Seni e coseni complessi

Fissato $\alpha \in \mathbb{R}$ dalla formula di Eulero si ha:

$$e^{\iota\alpha} = \cos\alpha + \iota\sin\alpha$$

e

$$e^{-\iota\alpha} = \cos\alpha - \iota\sin\alpha.$$

Sommando e sottraendo queste due relazioni si ottengono rispettivamente:

$$\cos\alpha = \frac{e^{\iota\alpha}+e^{-\iota\alpha}}{2} \qquad \text{e} \qquad \sin\alpha = \frac{e^{\iota\alpha}-e^{-\iota\alpha}}{2\iota}.$$

Poichè abbiamo dato significato all'esponenziale anche nel caso in cui α sia complesso possiamo facilmente estendere la definizione di seno e coseno a tutto il campo complesso nel seguente modo. Per ogni $z \in \mathbb{C}$:

$$\cos z = \frac{e^{\iota z}+e^{-\iota z}}{2} \qquad \text{e} \qquad \sin z = \frac{e^{\iota z}-e^{-\iota z}}{2\iota}.$$

Con tali definizioni non è difficile provare che molte proprietà delle funzioni trigonometriche, quali ad esempio le formule di addizione e sottrazione e le formule di duplicazione, continuano a valere. Le funzioni seno e coseno così definite sono funzioni periodiche di periodo 2π. Infatti

$$\cos(z+2k\pi) = \frac{e^{\iota(z+2k\pi)} + e^{-\iota(z+2k\pi)}}{2} = \frac{e^{\iota z} + e^{-\iota z}}{2} = \cos z.$$

Analoga dimostrazione vale per la funzione seno. Le funzioni seno e coseno complessi, a differenza di quelle reali, possono avere modulo maggiore di 1. Per esempio

$$\cos(2\iota) = \frac{e^{\iota(2\iota)} + e^{-\iota(2\iota)}}{2} = \frac{e^{-2} + e^{2}}{2} > 2.$$

Seni e coseni iperbolici complessi

Fissato $t \in \mathbb{R}$ si definiscono seno e coseno iperbolico le funzioni

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \qquad \text{e} \qquad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

È naturale allora estendere al campo complesso questa definizione, ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C}$:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \text{e} \qquad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Le funzioni appena definite risultano essere periodiche di periodo 2π. Infatti

$$\cosh(z+2k\pi) = \frac{e^{z+2k\pi} + e^{-(z+2k\pi)}}{2} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z.$$

Tra funzioni iperboliche e funzioni circolari valgono le seguenti relazioni

$$
\begin{aligned}
1) \quad & \sin(\iota z) &&= \frac{e^{\iota(\iota z)} - e^{-\iota(\iota z)}}{2\iota} = -\iota\frac{e^{-z} - e^{z}}{2} = \iota \sinh z \\
2) \quad & \cos(\iota z) &&= \frac{e^{\iota(\iota z)} + e^{-\iota(\iota z)}}{2\iota} = \frac{e^{-z} + e^{z}}{2} = \cosh z \\
3) \quad & \sinh(\iota z) &&= \frac{e^{\iota z} - e^{-\iota z}}{2} = \iota\frac{e^{\iota z} - e^{-\iota z}}{2\iota} = \iota \sin z \\
4) \quad & \cosh(\iota z) &&= \frac{e^{\iota z} + e^{-\iota z}}{2} = \cos z.
\end{aligned}
$$

Gli zeri delle funzioni iperboliche

Vogliamo determinare ora i valori $z \in \mathbb{C}$ che annullano le funzioni iperboliche.

$$\sinh z = 0 \Leftrightarrow e^{z} - e^{-z} = 0 \Leftrightarrow e^{2z} = 1 \Leftrightarrow e^{2z} = e^{\iota 2k\pi} \Rightarrow z = k\pi\iota.$$

Analogamente

$$
\begin{gathered}
\cosh z = 0 \Leftrightarrow e^{z} + e^{-z} = 0 \Leftrightarrow e^{2z} = -1 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow e^{2z} = e^{\iota(\pi + 2k\pi)} \Rightarrow z = \iota\frac{\pi}{2} + k\pi\iota.
\end{gathered}
$$

Osservazione. Se $\tilde{z}$ è un numero complesso tale che $\sinh \tilde{z} = 0$ allora dalla proprietà 1) vista precedentemente deve essere

$$\iota \sin(\iota\tilde{z}) = 0 \Leftrightarrow \sin(\iota\tilde{z}) = 0$$

e ciò implica che $\iota\tilde{z}$ è zero della funzione seno. Dunque dalla definizione

$$\sin(z) = 0 \Rightarrow z = k\pi$$

infatti la funzione seno è una funzione dispari. Inoltre se $\tilde{z}$ è un numero complesso tale che $\cosh \tilde{z} = 0$ allora dalla proprietà 2) deve essere

$$\cos(\iota\tilde{z}) = 0 \Rightarrow \cos(-\iota\tilde{z}) = 0$$

e dunque gli zeri sono

$$z = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

infatti la funzione coseno è pari.

Logaritmo di un numero complesso

Per $r > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ sappiamo che la funzione logaritmo (reale) ha la seguente proprietà:

$$\log re^{\alpha} = \log r + \log e^{\alpha} = \log r + \alpha \log e = \log r + \alpha.$$

Definiamo con abuso di notazione il logaritmo complesso in modo che questa proprietà venga consarvata. Poniamo infatti per $z \neq 0$:

$$\log z = \log(|z|e^{\iota(\theta+2k\pi)}) = \log|z| + \iota arg(z) + \iota 2k\pi; \qquad k \in \mathcal{Z}.$$

Si noti che la funzione logaritmo cosi̇̀ definita è una funzione ad infiniti valori.

Esponenziale con base complessa

L'esponenziale complesso si definisce a partire dai logaritmi complessi. Per $z, w \in \mathbb{C}$ si pone:

$$z^w = e^{w \log z} = e^{w(\log|z| + \iota arg(z) + \iota 2k\pi)} \qquad k \in \mathcal{Z}.$$

Per esempio

$$\begin{aligned} \iota^{\iota} &= e^{\iota \log \iota} = e^{\iota(\log|\iota| + \iota arg(\iota) + \iota 2k\pi)} = \\ &= e^{\iota(\iota\pi/2 + \iota 2k\pi)} = e^{-\pi/2 - 2k\pi}. \end{aligned}$$